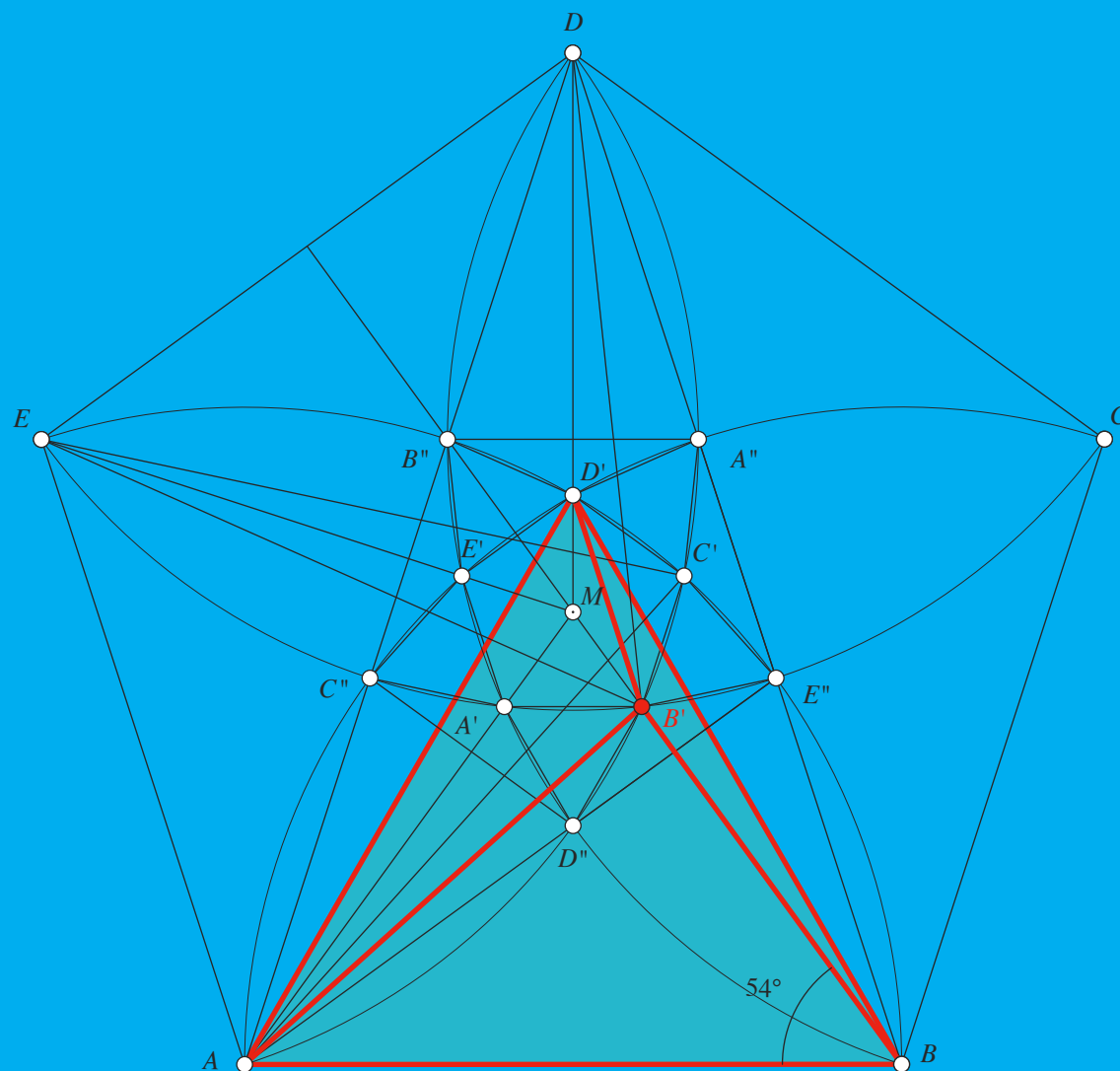


V S M P
S S P M P
S S I M F

Bulletin

September 2021 — Septembre 2021 — Settembre 2021

N° 147



V S M P
S S P M P
S S I M F

Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e di Fisica

Internet-Adressen — *Adresses Internet*
www.vsmp.ch — www.sspmp.ch — www.ssimf.ch

Titelseite — *Page de Titre*
Bemerkenswerte Punkte im gleichseitigen Dreieck. Artikel auf Seite 12 in dieser Ausgabe

In dieser Ausgabe — Dans ce numéro

VSMP – SSPMP – SSIMF	4
Arno Gropengiesser Éditorial – Editorial – Editoriale	4
Einladung Generalversammlung – Invitation à l’Assemblée générale – Invito all’Assemblea generale	5
Commission Romande de Mathématique	6
Alexandre Junod Sommes de trois carrés	6
Lara Gafner Triple médaille de bronze pour la Suisse aux Olympiades internationales de mathématiques	9
Deutschschweizerische Mathematikkommission	12
Peter Gallin, Heinz Klemenz Die 6° – 12° – 18° –Punkte im gleichseitigen Dreieck	12
Meike Akveld Der Einfluss von Mathematikwettbewerben in Schulen	15
H.U. Keller Von Bretschneider zu Brahmagupta, Heron und Pythagoras	20
Hans Walser (Buchbesprechung) Mario Gerwig, Der Satz von Pythagoras in 365 Beweisen	24
Herbert Bruderer Wie rechnet man mit dem Proportionalwinkel?	26
<i>Kurs: GeoGebra 1: Grundlagen der Bedienung</i>	30
<i>Kurs: GeoGebra 2: Anschauliche Zugänge zur Analysis</i>	31
Lara Gafner Dreifache Bronze für die Schweiz an Internationaler Mathematik-Olympiade	32
Commission Romande de Physique	33
Lara Gafner Les Suisses ont su se démarquer dans le cadre des Olympiades internationales de physique	33

Deutschschweizerische Physikkommission	34
Hans Peter Dreyer Klima und Quanten im gymnasialen Physikunterricht	34
<i>Kurs:</i> Planetenentstehung und extrasolare Planeten	41
Martin Lieberherr Wasserschaukel und ART	42
Lara Gafner Schweizer Physik-Olympioniken zeigen, was sie können	43
<i>Tagung:</i> Physik des Klimawandels	44
<i>Wettbewerb:</i> SYNT und SYPT 2021	46

Éditorial – Editorial – Editoriale

Chères et chers membres de la SSPMP, chères et chers collègues,

Durant l'année en cours, deux dossiers, dans le cadre du projet sur l'Évolution de la maturité gymnasiale (EMG/WEGM), ont occupé l'attention du comité : la consultation interne sur le Règlement/Ordonnance sur la reconnaissance des maturités (RRM/ORM) et la consultation sur les projets de révision des plans d'études cadres (PEC). Le comité s'est penché de manière intensive et critique sur les deux projets.

La SSPMP a présenté sa propre prise de position sur la révision du RRM, a en plus soutenu la position de la SSPES et signé celle de diverses associations cantonales. Les documents sont disponibles sur notre site : sspmp.ch/actualites/emg.

La SSPMP s'est aussi exprimé sur le projet de la révision des PEC, en tenant compte des précieuses considérations de ses 5 commissions permanentes: CMSI, CRM, CRP, DMK et DPK. De nombreux commentaires et suggestions de changements ont été soumis directement à la direction du projet.

Le Comité vous souhaite une année scolaire réussie et enrichissante et espère vous voir nombreuses et nombreux à notre Assemblée générale à Soleure le vendredi 26 novembre 2021 (voir invitation en page 5).



Geschätzte Mitglieder des VSMP, liebe Kolleginnen und Kollegen,

Im laufenden Jahr stehen zwei wichtige Etappen im Rahmen der Weiterentwicklung der gymnasialen Maturität (WEGM) im Fokus des VSMP-Vorstandes: erstens die interne Konsultation zum Maturitätsanerkennungsreglement/Maturitätsverordnung (MAR/MAV) und zweitens die Konsultation zu den Projekten über die Revision der Rahmenlehrpläne (RLP). Der Vorstand hat sich mit beiden Projekten intensiv und kritisch auseinandergesetzt.

Zur MAR-Revision hat er seine Positionen in einer eigenen Stellungnahme zum Ausdruck gebracht, ausserdem diejenige des VSG unterstützt und diejenige verschiedener Kantonalverbände mitunterzeichnet. Die Dokumente sind auf unserer Website unter vsmp.ch/aktuell/wegm abrufbar.

Im Rahmen der RLP-Konsultation hat der VSMP unter Einbezug der Vorüberlegungen seiner 5 ständigen Kommissionen CMSI, CRM, CRP, DMK und DPK Stellung genommen. Zahlreiche Kommentare und Änderungsvorschläge wurden direkt an die Projektleitung weitergeleitet.

Der Vorstand wünscht allseits ein erfolgreiches und bereicherndes Schuljahr und hofft, euch möglichst zahlreich am Freitag, 26. November an unserer Generalversammlung in Solothurn begrüssen zu können (siehe Einladung Seite 5).



Cari membri della SSIMF, care colleghe e cari colleghi,

nell'anno in corso, due questioni nell'ambito del progetto sullo Sviluppo della maturità liceale (SML/WEGM) hanno occupato il comitato della SSIMF: la consultazione interna sul Regolamento/Ordinanza sul riconoscimento della maturità (O/RRM) e la consultazione sul progetto di revisione dei piani quadro di studio (PQS). Il comitato ha esaminato in maniera approfondita e critica entrambi i progetti.

La SSIMF si è espressa sulla revisione dell'ORM con una propria presa di posizione, ha sostenuto la posizione della SSISS e sottoscritto quella redatta da diverse associazioni cantonali. I documenti sono disponibili sul nostro sito : ssimf.ch/attualita/sml.

La SSIMF si è pure espressa sui progetti legati alla revisione dei PQS, tenendo conto delle preziose considerazioni delle sue cinque commissioni permanenti: CMSI, CRM, CRP, DMK e DPK. Numerosi commenti e diverse proposte di modifica sono stati trasmessi direttamente alla direzione del progetto.

Il comitato vi augura un anno scolastico ricco di soddisfazioni e, nella speranza di potervi incontrare numerosi alla nostra Assemblea Generale venerdì 26 novembre 2021 (vedi invito a pagina 5), salutiamo cordialmente.

Locarno, septembre 2021 – September 2021 – settembre 2021

Au nom de l'entier du comité – Im Namen des ganzen Vorstandes – A nome di tutto il comitato
Arno Gropengiesser, Presidente della SSIMF



V S M P
S S P M P
S S I M F

Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e di Fisica

Einladung zur Generalversammlung des VSMP

Invitation à l'Assemblée générale de la SSPMP

Invito all'Assemblea generale della SSIMF

Kantonsschule Solothurn, Freitag, 26. November 2021 – *vendredi 26 novembre 2021* – venerdì 26 novembre 2021

Raum/*salle*/aula: wird vor Ort angeschrieben, vor l'affichage sur place, vedere l'affissione in loco

A. Rahmenprogramm

Ca. 14:00, gemäss Angaben auf der Website vsmp.ch (ab Anfang November), *selon les indications sur le site sspmp.ch (dès début novembre)*, secondo le indicazioni sul sito ssimf.ch (da inizio novembre).

B. Generalversammlung 2021 – Assemblée générale 2021 – Assemblea generale 2021

Beginn– *Début* – Inizio: ca. 16:00

Traktandenliste – *Ordre du jour* – Ordine del giorno:

0. Begrüssung – *Salutations* – Saluto
1. Traktandenliste 2021, Protokoll 2020 – *Ordre du jour 2021, procès-verbal 2020* – Ordine del giorno 2021, verbale 2020
2. Jahresberichte des Vereins und der Kommissionen 2020/21 – *Rapports annuels de la société et des commissions 2020/21* – Rapporti annuali della società e delle commissioni 2020/21
3. Jahresrechnungen des Vereins und der Kommissionen 2020/21 – *Comptes annuels de la société et des commissions 2020/21* – Conti annuali della società e delle commissioni 2020/21
4. Budget 2021/22 und Mitgliederbeitrag 2022/23 – *Budget 2021/22 et cotisations 2022/23* – Preventivo 2021/22 e quota sociale 2022/23
5. Mutationen – *Mutations* – Mutazioni
6. Wahlen 2021-2023 – *Élections 2021-2023* – Elezioni 2021-2023
7. Anträge von Mitgliedern – *Propositions des membres* – Mozioni di membri
8. Varia – *Divers* – Eventuali

Bemerkung – *Remarque* – *Commento*:

- Das Protokoll der letzten GV sowie die diesjährige Einladung sind auf unserer Website vsmp.ch zu finden.
- *Le procès-verbal de la dernière AG ainsi que l'invitation de cette année se trouvent sur notre site sspmp.ch.*
- Il verbale dell'ultima AG anche l'invito all'AG di quest'anno possono essere trovati sul sito ssimf.ch.

C. Gemeinsames Abendessen – *Repas du soir en commun* - Cena comune

- Im Anschluss an die GV werden wir in einem Restaurant ein gemeinsames Nachtessen einnehmen. Der Ort wird an der GV bekanntgegeben.
- *Après l'assemblée générale, nous prendrons un repas en commun dans un restaurant dont l'adresse sera communiquée lors de l'AG.*
- Al termine è prevista una cena comune; l'indirizzo del ristorante sarà comunicato al termine dell'AG.

Locarno, settembre 2021, Arno Gropengiesser, Präsident / *Président* / Presidente

Sommes de trois carrés

Alexandre Junod, Lycée Denis-de-Rougemont (Neuchâtel), alexandre.junod@rpn.ch

Problématique

Un nombre entier $m > 0$ étant donné, on veut savoir s'il existe trois autres entiers x , y et z tels que $m = x^2 + y^2 + z^2$. On peut déjà remarquer que, modulo 4, le carré d'un nombre pair est congru à 0 et celui d'un nombre impair est congru à 1. Il s'ensuit que si $m = x^2 + y^2 + z^2$ est divisible par 4, alors x , y et z sont pairs et $\frac{m}{4}$ est également une somme de trois carrés. La réciproque est trivialement vraie (si m est somme de trois carrés, alors $4m$ en est aussi une) et en réitérant au besoin le raisonnement, on est amené à n'étudier que les nombres m qui ne sont pas divisibles par 4. D'autre part, modulo 8, un carré d'entier ne peut être congru qu'à 0, 1 ou 4, donc si le nombre m est une somme de trois carrés, il ne peut pas être congru à 7 modulo 8. Il ne reste à étudier que les nombres m congrus à 1, 2, 3, 5 ou 6 (modulo 8) et nous allons montrer qu'une décomposition en somme de trois carrés est toujours possible dans ces cas. On peut supposer que m n'est divisible par aucun carré parfait.

1 Résultat préliminaire

Inspiré par [2] (lemmes des pages 37-42), nous allons montrer qu'il existe un nombre r , somme de deux carrés, qui est congru à -1 modulo m et tel que m est un carré modulo r . En d'autres termes, il existe trois nombres entiers a , b et c tels que m divise $a^2 + b^2 + 1$ et $a^2 + b^2$ divise $c^2 - m$.

- Cas $m \equiv 2 \pmod{4}$, c'est-à-dire $m \equiv 2$ ou $m \equiv 6 \pmod{8}$

Les nombres $8m$ et $m - 1$ sont premiers entre eux car tout diviseur commun divise $8m - 8(m - 1) = 8$ alors que $m - 1$ est impair. Par le théorème de Dirichlet (que nous admettons), il existe un nombre premier de la forme $p = (m - 1) + k \cdot 8m$. Il est congru à 1 modulo 4 et un théorème de Fermat nous assure qu'il s'agit d'une somme de deux carrés (voir [3]). De plus, ce nombre premier est congru à -1 modulo m , donc modulo tout nombre premier q qui divise m . Ainsi, si on écrit $m = 2m'$, la loi de réciprocité quadratique (voir [4]) permet d'écrire

$$\left(\frac{m}{p}\right) = \left(\frac{2m'}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right) \prod_{q|m'} \left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right) \prod_{q|m'} \left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{2}{p}\right) \prod_{q|m'} \left(\frac{-1}{q}\right) = \left(\frac{2}{p}\right) \prod_{q \equiv 3} (-1)$$

où la congruence sur les diviseurs premiers (impairs) de m' est à considérer modulo 4.

- Si m' a un nombre pair de diviseurs premiers congrus à 3 modulo 4, alors $m' \equiv 1 \pmod{4}$, $m \equiv 2 \pmod{8}$, $p \equiv 1 \pmod{8}$ et donc $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$ (voir [4]).
- Sinon, $m' \equiv 3 \pmod{4}$, $m \equiv 6 \pmod{8}$, $p \equiv 5 \pmod{8}$ et donc $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$ (voir [4]).

Dans tous les cas, on a $\left(\frac{m}{p}\right) = 1$, autrement dit m est un carré modulo p .

- Cas $m \equiv 1 \pmod{4}$, c'est-à-dire $m \equiv 1$ ou $m \equiv 5 \pmod{8}$

Alors $2m \equiv 2 \pmod{8}$ et, par le cas précédent, il existe un nombre premier $p = (2m - 1) + k \cdot 16m$ qui est une somme de deux carrés, congru à -1 modulo $2m$ donc modulo m , et tel que $2m$ est un carré modulo p . Comme $p \equiv 1 \pmod{8}$, alors 2 est un carré modulo p (voir [4]) et il en est de même pour m car les congruences $2 \equiv x^2$ et $2m \equiv y^2$ impliquent $m \equiv 2^{-1}y^2 \equiv (x^2)^{-1}y^2 = (x^{-1}y)^2 \pmod{p}$.

- Cas $m \equiv 3 \pmod{8}$

Les nombres $4m$ et $\frac{m-1}{2}$ sont premiers entre eux car tout diviseur commun divise $4m - 8\frac{m-1}{2} = 4$ alors que $\frac{m-1}{2}$ est impair. Par le théorème de Dirichlet, il existe un nombre premier de la forme $p = \frac{m-1}{2} + k \cdot 4m$. Comme il est congru à 1 modulo 4 , il s'agit d'une somme de deux carrés. Le nombre $2p = (m-1) + k \cdot 8m$ est également une somme de deux carrés car $2(x^2 + y^2) = (x+y)^2 + (x-y)^2$. Il est congru à -1 modulo m et la loi de réciprocité quadratique (voir [4]) implique

$$\left(\frac{m}{p}\right) = \prod_{q|m} \left(\frac{q}{p}\right) = \prod_{q|m} \left(\frac{p}{q}\right) = \prod_{q|m} \left(\frac{4p}{q}\right) = \prod_{q|m} \left(\frac{-2}{q}\right) = \prod_{\substack{q \equiv 5 \\ q \equiv 7}} (-1),$$

où les congruences sur les diviseurs premiers de m sont à considérer modulo 8 . On peut donc écrire

$$m = \left(\prod_{q \equiv 1} q\right) \left(\prod_{q \equiv 3} q\right) \left(\prod_{q \equiv 5} q\right) \left(\prod_{q \equiv 7} q\right) \equiv \left(\prod_{q \equiv 3} 3\right) \left(\prod_{q \equiv 5} (-3)\right) \left(\prod_{q \equiv 7} (-1)\right) = \underbrace{\left(\prod_{q \equiv \pm 3} 3\right)}_A \left(\frac{m}{p}\right).$$

On a $A \equiv 1$ ou $A \equiv 3$ alors que $\left(\frac{m}{p}\right) = \pm 1$. Comme $m \equiv 3$, la seule possibilité est $A \equiv 3$ et $\left(\frac{m}{p}\right) = 1$. Ainsi, il existe un entier x tel que p divise $x^2 - m$. Quitte à remplacer x par $x + p$, on peut supposer que x est impair, tout comme m . Ainsi $x^2 - m$ est pair et m est un carré modulo $2p$.

2 Décomposition en somme de trois carrés rationnels

Par construction, r est une somme de deux carrés congrue à -1 modulo m et il existe un nombre ρ tel que $m \equiv \rho^2 \pmod{r}$. L'ensemble $E = \{0, 1, \dots, \lfloor \sqrt{mr} \rfloor\} \times \{0, 1, \dots, \lfloor \sqrt{m} \rfloor\} \times \{0, 1, \dots, \lfloor \sqrt{r} \rfloor\}$ est de cardinalité $(1 + \lfloor \sqrt{mr} \rfloor)(1 + \lfloor \sqrt{m} \rfloor)(1 + \lfloor \sqrt{r} \rfloor) > \sqrt{mr}\sqrt{m}\sqrt{r} = mr$. Par le principe des tiroirs, il contient au moins deux éléments distincts $(x_1; y_1; z_1)$ et $(x_2; y_2; z_2)$ tels que $x_1 - ry_1 + (r+1)\rho z_1$ et $x_2 - ry_2 + (r+1)\rho z_2$ aient le même reste lors de la division euclidienne par mr . Si on pose $x = x_1 - x_2$, $y = y_1 - y_2$ et $z = z_1 - z_2$, on a alors la congruence $x - ry + (r+1)\rho z \equiv 0 \pmod{mr}$. En la multipliant par $x + ry - (r+1)\rho z$, on obtient

$$x^2 - (ry - (r+1)\rho z)^2 \equiv 0 \pmod{mr}.$$

Le membre de gauche est congru à $x^2 + ry^2 - mz^2$ modulo m (car $r \equiv -1 \pmod{m}$) et modulo r . Comme m et r sont premiers entre eux, la congruence a lieu modulo mr , autrement dit $x^2 + ry^2 - mz^2$ est un multiple de mr . De plus, comme $|x| < \sqrt{mr}$, $|y| < \sqrt{m}$ et $|z| < \sqrt{r}$, on a

$$-mr < -mz^2 \leq x^2 + ry^2 - mz^2 \leq x^2 + ry^2 < mr + mr = 2mr.$$

On en déduit que $x^2 + ry^2 - mz^2 = 0$ ou $x^2 + ry^2 - mz^2 = mr$. Dans ce dernier cas, on peut écrire $x^2 + ry^2 - m(z^2 + r) = 0$ et en multipliant par $z^2 + r$, on trouve

$$0 = (x^2 + ry^2)(z^2 + r) - m(z^2 + r)^2 = (xz + ry)^2 + r(yz - x)^2 - m(z^2 + r)^2.$$

Quitte à renommer les choses, on peut supposer $x^2 + ry^2 - mz^2 = 0$ et comme r est une somme de deux carrés, disons $r = r_1^2 + r_2^2$, on a $x^2 + (r_1y)^2 + (r_2y)^2 = z^2m$. Ceci signifie que m est une somme de trois carrés de nombres rationnels dont z est un dénominateur commun.

3 Algorithme final

Nous donnons ici une démonstration adaptée du théorème d'Aubry qui affirme qu'une somme entière de trois carrés de nombres rationnels est une somme de trois carrés d'entiers. On suppose donc que $m = (x/d)^2 + (y/d)^2 + (z/d)^2$ où les entiers x, y et z ne sont pas tous divisibles par $d > 0$ (sinon, le théorème serait trivialement démontré). D'un point de vue géométrique, le point $P(x/d; y/d; z/d)$ se trouve sur la sphère \mathcal{S} centrée en l'origine et de rayon \sqrt{m} . En arrondissant chacune de ses coordonnées à l'entier le plus proche, on obtient un point différent $Q([x/d]; [y/d]; [z/d])$. La droite (QP) est dirigée par le vecteur non nul $d \cdot \vec{QP}$ dont les composantes sont des nombres entiers et tout point P' situé sur cette droite vérifie une relation vectorielle $\vec{OP'} = \vec{OQ} + \lambda d \vec{QP}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On peut écrire

$$\|\vec{OP'}\|^2 - m = \lambda^2 \underbrace{d^2 \|\vec{QP}\|^2}_{a>0} + \underbrace{2d(\vec{OQ} \cdot \vec{QP})}_{b} \lambda + \underbrace{\|\vec{OQ}\|^2 - m}_{c}.$$

Cette expression est quadratique en λ avec des coefficients a, b et c entiers. Elle s'annule lorsque $\lambda = \frac{1}{d}$ (car alors $P' = P$) et pour $\lambda = \frac{d \cdot c}{a}$ par la relation de Viète. Le nombre a est un entier strictement positif et, modulo d , on a $a = \|d \cdot \vec{QP}\|^2 = \|d \cdot \vec{OP} - d \cdot \vec{OQ}\|^2 \equiv \|d \cdot \vec{OP}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = md^2 \equiv 0$. Il s'ensuit que $d' = \frac{a}{d} = d \|\vec{QP}\|^2$ est un entier positif. On a la majoration

$$d' = d \left(\left(\frac{x}{d} - \left[\frac{x}{d} \right] \right)^2 + \left(\frac{y}{d} - \left[\frac{y}{d} \right] \right)^2 + \left(\frac{z}{d} - \left[\frac{z}{d} \right] \right)^2 \right) \leq d \left(\left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right) < d.$$

Pour résumer, l'égalité $\|\vec{OP'}\|^2 = m$ a lieu lorsque $\lambda = \frac{d \cdot c}{a} = \frac{c}{d'}$. Les coordonnées du point P' associé (deuxième point d'intersection de (QP) avec \mathcal{S}) sont des nombres rationnels ayant le dénominateur commun $d' < d$ et des numérateurs $\tilde{x} = d'[x/d] + c(x - d[x/d])$, \tilde{y} et \tilde{z} (définis de manière analogue). On peut itérer l'algorithme $(x; y; z; d) \mapsto (\tilde{x}; \tilde{y}; \tilde{z}; d')$ jusqu'à ce que d' divise \tilde{x}, \tilde{y} et \tilde{z} , quitte à avoir $d' = 1$. On obtient alors la décomposition $m = (\tilde{x}/d')^2 + (\tilde{y}/d')^2 + (\tilde{z}/d')^2$ avec trois carrés d'entiers.

4 Conclusion et références

Nous avons démontré le théorème de Legendre (1752 – 1833) qui stipule que tout nombre entier peut s'écrire comme une somme de trois carrés, sauf s'il est de la forme $m = 4^k(8n + 7)$ avec k et n entiers. Comme toutes les preuves que nous avons rencontrées, notre version mobilise le théorème de Dirichlet, la loi de réciprocité quadratique et le théorème de Fermat concernant les sommes de deux carrés mais elle évite d'autres résultats tels la théorie des formes quadratiques ou le théorème de Minkowski sur les espaces convexes symétriques (voir [1] ou [2]).

- [1] V. CHISTOLINI, T. MACDONALD, M. ZHANG
Representing numbers as sums of three squares : history and proofs,
www.maths.dk/teaching/courses/math357-spring2016/projects/three_squares.pdf
- [2] J. CRETAL, A. SALVARY, *Sommes de carrés*, Travail de Master, 2009-2010
http://math.univ-lille1.fr/~bhowmik/enseignement/Mem_master/mem_sommescarres.pdf
- [3] A. JUNOD, *Sommes de deux et quatre carrés*, Bulletin de la SSPMP n° 144, septembre 2020
- [4] A. JUNOD, *La loi de réciprocité quadratique*, Bulletin de la SSPMP n° 146, mai 2021

Triple médaille de bronze pour la Suisse aux Olympiades internationales de mathématiques

Lara Gafner, Olympiades de la science, l.gafner@olympiad.ch

Cette semaine était la plus importante de l'année pour de nombreux·ses jeunes génies de mathématiques. En effet, les Olympiades internationales de mathématiques (IMO) se sont déroulées du 18 au 24 juillet. Parmi les 619 participant·e·s de 107 pays, six Suisses ont répondu présents, dont trois ont remporté une médaille de bronze.

- Bora Olmez, International School Basel (BL)
- Joël Huber, Gymnasium Freudenberg (ZH)
- Johann Williams, Gymnase de Renens (VD)
- Mathys Douma, Lycée cantonal Porrentruy (JU)
- Philipp Junghans, Alte Kantonsschule Aarau (AG)
- Yanta Wang, Gymnasium Oberwil (BL)

Ce sont Bora Olmez, Joël Huber et Yanta Wang qui ont décroché les médailles de bronze. Mathys Douma a été distingué par une mention honorable.

Saint-Gall et non St-Pétersbourg

L'édition de cette année était organisée par la Russie, mais les délégations n'ont pas pu se rendre sur place en raison de la pandémie. Les Suisses, cependant, ont réussi à trouver une solution pour conserver la dimension internationale de cette manifestation. Du 12 au 25 juillet, ils·elles ont organisé un camp à Wildhaus (SG) et y ont invité la délégation slovène avec laquelle ils·elles ont participé ensemble aux IMO. Salle d'escalade, excursion au Liechtenstein, jeux d'échecs ou de cartes ont rythmé leurs journées. Mais avant de passer les deux examens de quatre heures et demie des 19 et 20 juillet, il y avait un seul mot d'ordre : s'exercer encore et encore. Avec trois médailles de bronze et une mention honorable, l'équipe suisse se trouvait au milieu du peloton. Dans l'ensemble, c'est l'équipe chinoise qui a obtenu les meilleurs résultats.

« Arrives-tu à prouver que... »

Lors des épreuves, les jeunes avaient chacun·e 3 tâches à accomplir sur des sujets portant sur la géométrie, l'algèbre, l'analyse combinatoire et la théorie des nombres. Par exemple, une tâche consistait à prouver l'assertion suivante : Si l'on prend un nombre quelconque n et que l'on divise tous les nombres de la série de $n, n+1, n+2$ à $2n$ en deux groupes, pour tous les nombres n supérieurs à 100, il y aura forcément deux nombres dans le même groupe dont la somme est un nombre carré. Pour être en mesure de répondre à ce type d'énigme, les participant·e·s des IMO investissent beaucoup de leur temps libre dans les mathématiques. « Ce qui me fascine le plus dans les mathématiques, c'est lorsque nous les utilisons pour éclairer d'autres domaines », déclare Johann Williams. « Les mathématiques sont une matière importante parce que lorsque nous réalisons des progrès dans cette branche, nous réalisons des progrès pour la société toute entière - la technologie, la médecine et notre compréhension du monde lui-même ».

Dès l'automne 2021, vos élèves pourront s'inscrire aux Olympiades suisses de mathématiques. Plus d'informations sur mathematical.olympiad.ch.



Lucy Cavendish College
University of Cambridge



St Edmund's College
University of Cambridge

The University of Cambridge undergraduate mathematics course is widely regarded as one of the very best mathematics degrees of its kind. In addition to lecture courses taught by some of the world's top mathematicians, students receive unparalleled learning support from their Colleges in the form of regular supervision meetings where two students meet an expert to talk about the mathematics learned in the lectures.

Lucy Cavendish College and **St Edmund's College** are two of the thirty-one constituent Colleges of the University of Cambridge and are interested in providing a mathematical home for talented Swiss applicants. Lucy Cavendish College admits students of all ages while St Edmund's is a College for so-called *mature students*, i.e., students who are at least 21 years old by the start of their studies (this could be particularly interesting for students who do military or civilian service or plan to do something else before going to University). Both Lucy Cavendish and St Edmund's are conveniently located on Castle Hill, very close to the *Centre for Mathematical Sciences* (CMS).

Applying to the University of Cambridge can seem like a complicated and daunting process: admission requires an interview and to take an additional test, the Sixth Term Examination Paper (STEP). The Colleges and the University provide guidance and advice for prospective candidates and support for preparing for the STEP.

If you have mathematically talented students in your classes, especially those who enjoy mathematics competitions (*Mathematik-Olympiade*, *Känguru der Mathematik*, etc.), who might be interested in studying mathematics at Cambridge, Lucy Cavendish College and St Edmund's College would be very happy to help you assist your students in the applications process. Please get in touch with the Director of Studies for Mathematics at our two Colleges, Professor Benedikt Löwe.

Lucy Cavendish College
University of Cambridge
Lady Margaret Road
Cambridge, CB3 0BU

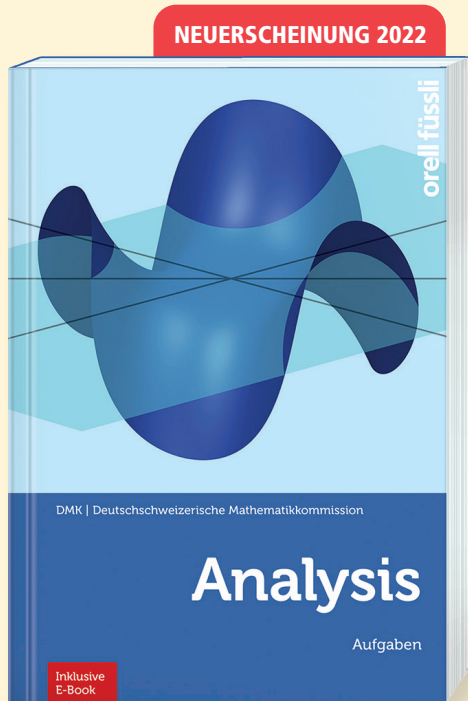
St Edmund's College
University of Cambridge
Mount Pleasant
Cambridge, CB3 0BN

Contact: Professor Benedikt Löwe; b.loewe@dpmms.cam.ac.uk



Vorankündigung – Lehrwerk zur Analysis

Mit dem Band zur «Analysis» werden die Lehrmittel zum Kanon Mathematik für das Grundlagenfach Mathematik am Gymnasium vervollständigt!



Provisorisches Cover

DMK (Hrsg.)
Baoswan Dzung Wong, Marco Schmid, Regula Sourlier,
Hansjürg Stocker, Reto Weibel

Analysis – Aufgaben

inklusive E-Book

1. Auflage 2022 | 978-3-280-04200-7

Analysis – Ausführliche Lösungen

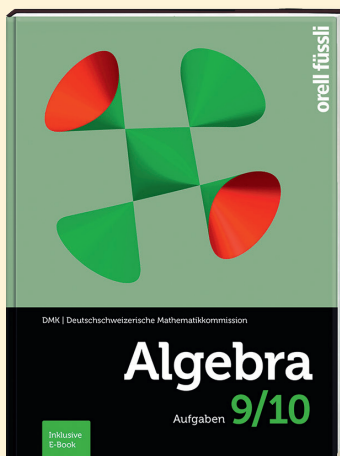
inklusive E-Book

1. Auflage 2022 | 978-3-280-04201-4

Lieferbar im Frühling 2022

Für Spannung ist gesorgt – der Aufgabenband wird eine vielfältige Aufgabensammlung von einfachen Fragen und Aufgaben bis hin zu anspruchsvollen Anwendungen bieten, ergänzt durch kurze Theorieblöcke.

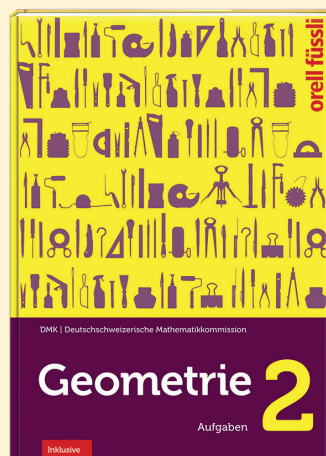
Die DMK-Aufgabenbücher zum Kanon Mathematik in der Übersicht:



Algebra 9/10 Aufgaben

Inklusive E-Book

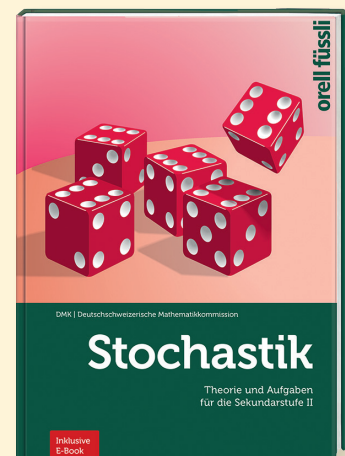
2. Auflage 2020
978-3-280-04072-0, Fr. 39.–



Geometrie 2 – Aufgaben

Inklusive E-Book

1. Auflage 2019
978-3-280-04137-6, Fr. 32.–



Stochastik

Inklusive E-Book

Theorie und Aufgaben
für die Sekundarstufe II
1. Auflage 2018
978-3-280-04139-0, Fr. 35.–

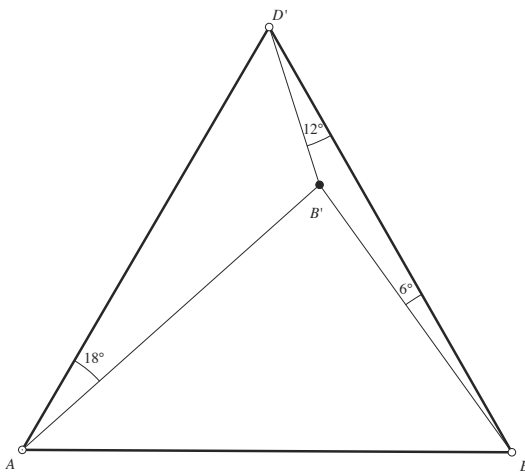
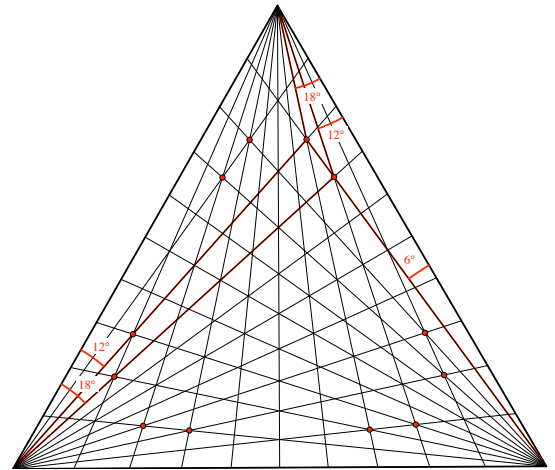
Bestellen Sie online über
www.ofv.ch/lernmedien

orell füssli
verlag

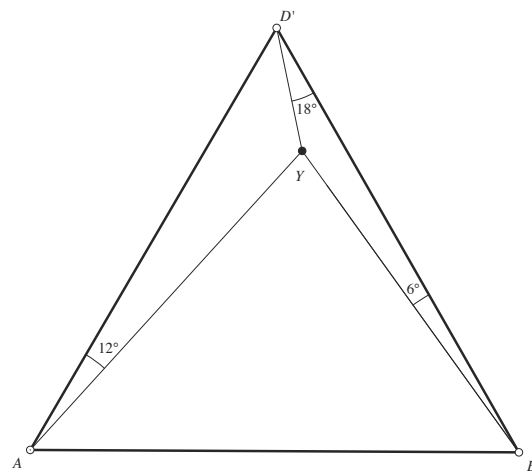
Die 6°-12°-18°-Punkte im gleichseitigen Dreieck

Peter Gallin, peter@gallin.ch, und Heinz Klemenz, hklemenz@geosoft.ch

Es gibt im gleichseitigen Dreieck zwölf bemerkenswerte Punkte, welche die Seiten des Dreiecks unter ganz speziellen Winkeln sichten. Zieht man sämtliche Transversalen durch die Ecken des Dreiecks, welche mit den Seiten die Winkel 6°, 12°, 18°, 24° und 30° einschliessen, so gibt es genau zwölf nicht-triviale Punkte, in denen sich drei Transversalen schneiden. Zum einen sind es sechs Punkte, die dadurch entstehen, dass man eine 6°-Transversale mit einer 12°-Transversalen derselben Dreiecksseite schneidet. Dann liegen diese Schnittpunkte immer auf einer 18°-Transversalen zur dritten Ecke des Dreiecks, was wir in diesem Beitrag in einem ersten Schritt beweisen. Andererseits kann man eine 6°-Transversale und eine 12°-Transversale, die an verschiedenen Dreiecksseiten anliegen, miteinander schneiden und fällt dann auf eine 18°-Transversale zur dritten Ecke, was in einem zweiten Schritt ebenfalls bewiesen wird.



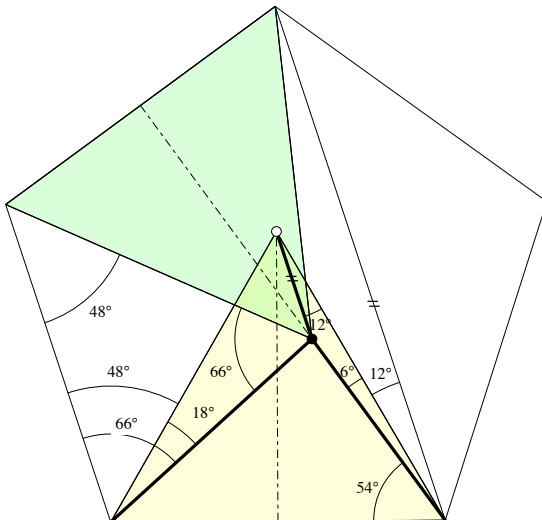
Erster Schritt: 6° und 12° an einer Seite



Zweiter Schritt: 6° und 12° an verschiedenen Seiten

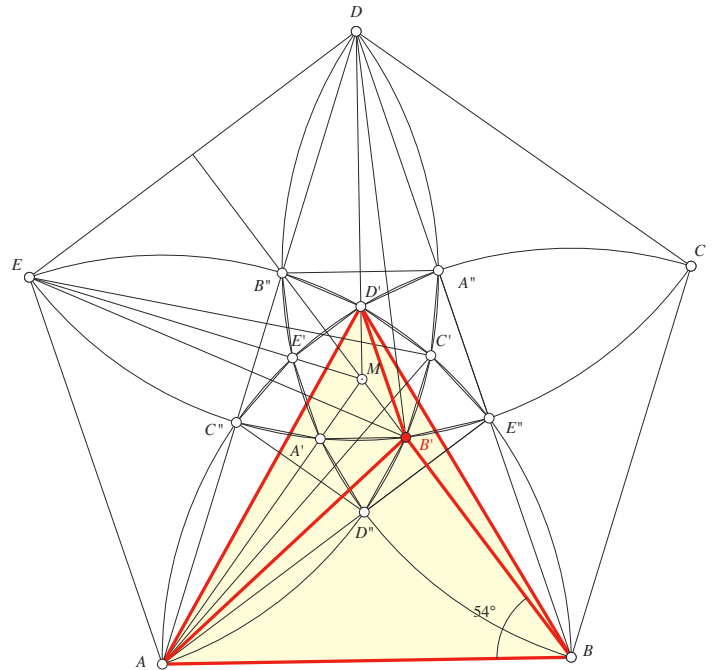
1 Vorbereitung und Look-and-See-Beweis

Die Kernidee des Beweises liegt im Vergleich von gleichseitigem Dreieck und regulärem Fünfeck. Damit schafft man es, einen Beweis für den ersten Fall zu konstruieren, der gleichsam ein Look-and-See-Beweis ist, wie das in der folgenden Abbildung links zu sehen ist. Diese Idee kann nun verallgemeinert werden, indem man im regelmässigen Fünfeck $ABCDE$ alle Kreise mit Mittelpunkten in dessen Ecken und Radien $|AB|$ zeichnet und so die fünf gleichseitigen Dreiecke im Innern des Fünfecks erhält.



Look-and-See-Beweis

Look: $6^\circ = 60^\circ - 54^\circ$ und Spitzen-
verbindung parallel zu Diagonale: 12° .
See: 18° .



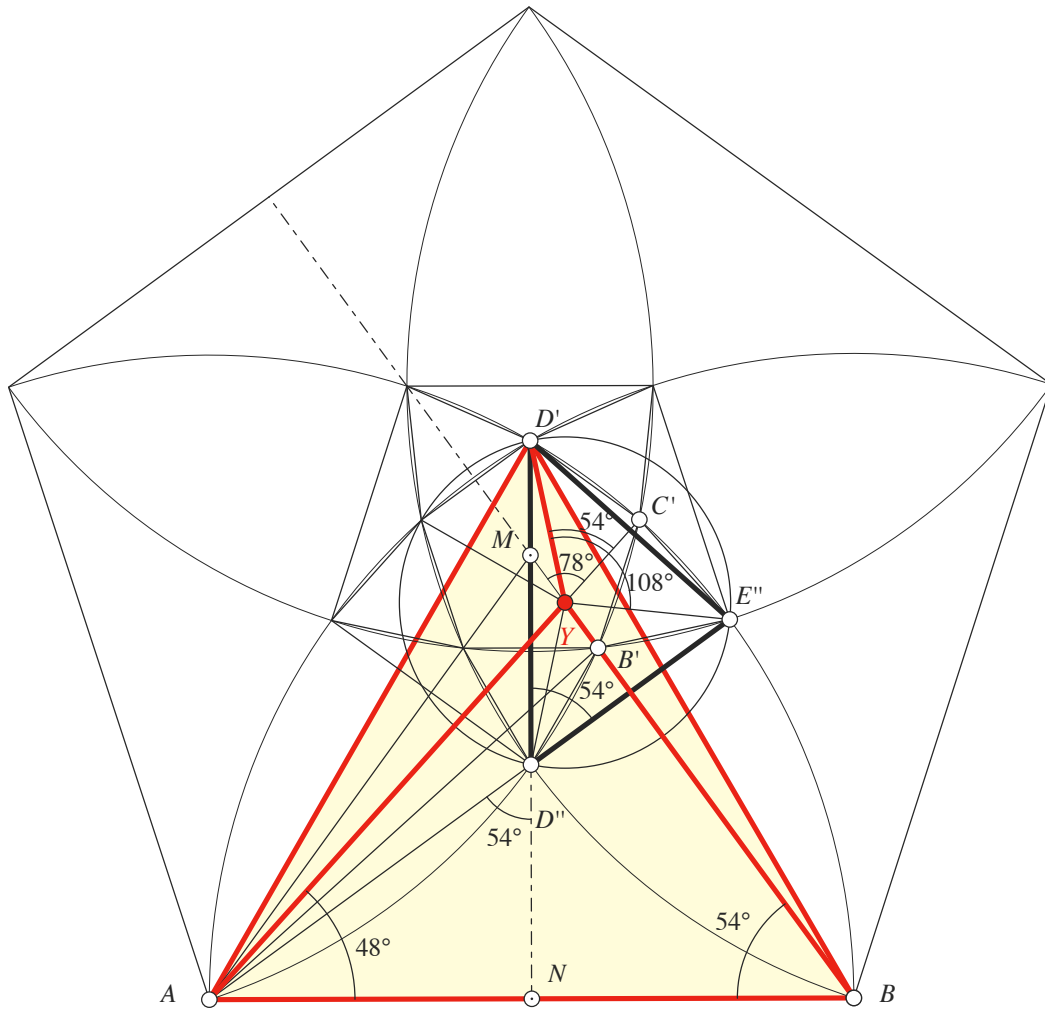
Die Spitzen A' , B' , C' , D' und E' der fünf gleichseitigen Dreiecke bilden ein neues reguläres Fünfeck, welches ein gestrecktes Bild des ursprünglichen Fünfecks mit Zentrum M ist. Das ist aus Symmetriegründen klar. Erstaunlicher ist, dass auf den fünf Seiten des neuen Fünfecks je ein gleichseitiges Dreieck aufgesetzt wird. Diese Dreiecke erzeugen eine fünfzackige Sternfigur $A''B''C''D''E''$. Um zu beweisen, dass lauter gleichseitige Dreiecke aufgesetzt sind, müssen wir nachweisen, dass z. B. die Bogenstücke $B''D'$ und $D'C'$ gleich lang sind, dass also die zugehörigen Zentriwinkel bei A gleich gross sind. Es gilt in den Dreiecken ABD' und ABM , dass $\sphericalangle D'AM = 60^\circ - 54^\circ = 6^\circ$. Ebenso gilt in den Dreiecken EAC' und EAM , dass $\sphericalangle C'AM = 6^\circ$. Also ist $\sphericalangle C'AD' = 12^\circ$. Da aber wegen der Fünfeckseigenschaft $\sphericalangle MAB'' = 18^\circ$ ist, folgt, dass auch $\sphericalangle B''AD' = 18^\circ - 6^\circ = 12^\circ$. Aus Symmetriegründen ist dann auch $\sphericalangle E''AC' = 12^\circ$. Der Vollständigkeit halber untersuchen wir noch $\sphericalangle B'AC'$: Da $\sphericalangle B'ED = 60^\circ$, folgt $\sphericalangle B'EA = 108^\circ - 60^\circ = 48^\circ$. Das Dreieck EAB' ist aber gleichschenkelig mit Basis AB' und hat demzufolge den Basiswinkel $\sphericalangle B'AE = 66^\circ$. Damit folgt $\sphericalangle B'AC' = 66^\circ - 60^\circ = 6^\circ$. Insgesamt sind also lauter 6° -Winkel bei A entstanden: $\sphericalangle B''AE' = \sphericalangle E'AD' = \sphericalangle D'AM = \sphericalangle MAC' = \sphericalangle C'AB' = \sphericalangle B'AE'' = 6^\circ$, die an die 6° -Transversalen der Einleitung erinnern.¹

2 Erster Schritt: 6° und 12° an einer Seite

Schauen wir nun den Punkt B' im gleichseitigen Dreieck ABD' genauer an. Für ihn gilt $\sphericalangle B'BD' = 60^\circ - 54^\circ = 6^\circ$. Da $B'D'$ parallel zu AE und BD liegt und $\sphericalangle DBD' = 12^\circ$ gilt, folgt $\sphericalangle B'D'B = 12^\circ$. Schliesslich ist $\sphericalangle B'AD' = 3 \cdot 6^\circ = 18^\circ$, womit gezeigt ist, dass B' ein 6° - 12° - 18° -Punkt im gleichseitigen Dreieck ABD' ist, was ja im Look-and-See-Beweis schon bewiesen wurde. Damit ist für den ersten Fall, wo der 6° - und der 12° -Winkel an einer Seite des gleichseitigen Dreiecks anschliessen, gezeigt, dass der dritte Winkel 18° beträgt. Im zweiten Fall liegen der 6° - und der 12° -Winkel an verschiedenen Seiten an. Es ist in diesem Fall etwas komplizierter zu beweisen, dass der dritte Winkel dann 18° beträgt. Glücklicherweise können wir auf die Sternfigur zurückgreifen, in der ein Punkt Y gefunden werden kann, der diese Bedingungen erfüllt.

¹Sämtliche Figuren sind mit der unter www.geosoft.ch frei erhältlichen, plattformunabhängigen und von Heinz Klemenz programmierten Geometrie-Software «Geopro» gezeichnet worden.

3 Zweiter Schritt: 6° und 12° an verschiedenen Seiten



In dieser zweiten Konstruktion haben wir alle Punkte der ersten Figur übernommen. Zusätzlich haben wir jetzt den Punkt Y als Schnittpunkt von AC' und BM definiert. Damit ist schon einmal gewährleistet, dass $\sphericalangle YBD' = 6^\circ$ und $\sphericalangle YAD' = 12^\circ$. Nun ist zu beweisen, dass $\sphericalangle YD'B = 18^\circ$. Dazu betrachten wir das Dreieck $D''E''D'$. Wegen der Symmetrie bezüglich BM sind $|YD''|$ und $|YE''|$ gleich gross. Es gilt aber auch wegen der Symmetrie bezüglich AC' die Gleichheit $|YE''| = |YD'|$. Somit ist Y der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $D''E''D'$. Ein paar Winkelberechnungen führen uns nun zum Ziel.

Von der Fünfeckseigenschaft her wissen wir, dass $\sphericalangle ABM = 54^\circ$. Da AE'' und BM einerseits und $D'N$ und AB andererseits je senkrecht zueinander stehen, muss auch $\sphericalangle AD''N = 54^\circ$ sein. Damit ist $\sphericalangle E''D''D' = 54^\circ$. Das ist ein Peripheriewinkel, dessen Zentriwinkel $E''YD' = 2 \cdot 54^\circ = 108^\circ$ beträgt, womit $\sphericalangle C'YD' = 54^\circ$.

Andererseits haben wir im Dreieck ABY die Winkel $\sphericalangle YAB = 48^\circ$ und $\sphericalangle YBA = 54^\circ$, was zur Folge hat, dass $\sphericalangle AYB = 180^\circ - 48^\circ - 54^\circ = 78^\circ$, was sich sofort auf $\sphericalangle C'YM = 78^\circ$ überträgt. Jetzt kennen wir den Winkel $\sphericalangle MYD' = 78^\circ - 54^\circ = 24^\circ$. Da $\sphericalangle NMB$ Aussenwinkel im Dreieck YMD' ist und 36° beträgt, folgt $\sphericalangle MD'Y = \sphericalangle NMB - \sphericalangle MYD' = 36^\circ - 24^\circ = 12^\circ$. Schliesslich folgt mit $\sphericalangle MD'B = 30^\circ$, dass $\sphericalangle YD'B = 30^\circ - 12^\circ = 18^\circ$. Der Punkt Y ist also von der zweiten Sorte der 6° - 12° - 18° -Punkte im gleichseitigen Dreieck ABD' , während der Punkt B' von der ersten Sorte ist.

Der Einfluss von Mathematikwettbewerben in Schulen

Eine Vergleichsstudie zwischen Puerto Rico, der Schweiz und dem Vereinigten Königreich

Meike Akveld, ETH Zürich, akveld@math.ethz.ch

Ferney Henao Ceballos, University of Puerto Rico at Mayagüez, ferney.henao@upr.edu (Statistische Auswertungen und Grafiken)

1 Einführung

Viele von Ihnen kennen sicherlich Mathematikwettbewerbe wie die Schweizer Mathematik Olympiade (SMO), Mathematik ohne Grenzen, den Känguru Wettbewerb oder viele andere und einige von Ihnen hatten sicherlich schon SchülerInnen, die dort mitmachten. Als Präsidentin vom Schweizer und internationalen Känguru Verein habe ich mich zusammen mit David Crawford (UK) und Luis Caceres (Puerto Rico) die folgende Leitfrage für unsere Studie gestellt: Was sind die Gründe für LehrerInnen für die Entscheidung, SchülerInnen für Mathematikwettbewerbe anzumelden oder nicht anzumelden?

Das Hauptziel dieser Studie war es, die Auswirkungen von Mathematikwettbewerben auf Mathematiklehrpersonen in Puerto Rico, der Schweiz und Grossbritannien zu untersuchen, deren SchülerInnen an diesen Wettbewerben teilnehmen, sowie die Auswirkungen auf ihre Schulzimmer. Zusätzlich haben wir versucht, Gründe zu finden, warum sich LehrerInnen dagegen entscheiden, ihre SchülerInnen zur Teilnahme an Wettbewerben zu motivieren. Wir wollten wissen, welche Auswirkungen der Einsatz von Mathematikwettbewerben als Teil der Lehr-Lern-Strategie im Schulzimmer hat, welche Auswirkungen es auf die LehrerInnen hat, sowohl in Bezug auf ihre berufliche Entwicklung wie auch auf die Schaffung von Netzwerken, und welche Auswirkungen es auf die Planung von Aktivitäten im Klassenzimmer und auf ausserschulische Aktivitäten hat. Wir wollten von den LehrerInnen auch etwas über Mathematikwettbewerbe im Allgemeinen erfahren.

Mathematikwettbewerbe können eine negative oder positive Rolle als Unterrichtsstrategie spielen [5]. Einige LehrerInnen und ForscherInnen sind der Meinung, dass Wettbewerbe nur gut vorbereitete und begabte SchülerInnen für die Mathematik motivieren. Andere denken, dass Wettbewerbe zu Spaltungen und Geschlechterkonflikten führen können [4]. Einige Studien [2] zeigen, dass das Entfernen des Wettbewerbsaspekts im Klassenzimmer die Stimmung der Schüler verbessert und eine bessere Klassenatmosphäre fördert. Es gibt sogar Studien [6], die darauf hinweisen, dass Wettbewerbe bei Schülern Verhaltensweisen hervorrufen, die dem Klassenklima schaden, vor allem weil einige Schüler unmotiviert sind.

Andererseits sind viele Aspekte in der Gesellschaft wettbewerbsorientiert und wir können den Unterricht im Klassenzimmer nicht von der gesellschaftlichen Realität trennen. Es gibt Wettbewerbe, die nur das Auswendiglernen und die geistige Geschwindigkeit messen; diese bringen nicht unbedingt einen Nutzen für den Schüler oder die Klassenumgebung. Wenn die Wettbewerbe gut fokussiert und gut in den Lernprozess integriert sind, können sie dazu beitragen, positive Aspekte wie Freundschaft, Inspiration und Ausdauer zu stärken [7].

In diesem Artikel möchte ich über die Resultate berichten, die besonders für die Schweiz interessant sind. Die Resultate und Interpretationen der Gesamtstudie können Sie in [1] nachlesen.

2 Umfrage

Um die oben genannten Fragen besser zu verstehen, haben wir eine Umfrage erstellt, die wir Ihnen Anfangs 2021 zugeschickt haben. Von den etwa 400 verschickten Links, haben 52 Personen die Umfrage beantwortet, was einem Rücklauf von etwa 13% entspricht. Die Links wurden über die Mailingliste von Professor Hungerbühler von der ETH Zürich verschickt und somit wurden hauptsächlich Gymnasiallehrpersonen in der Deutschschweiz eingeladen. An dieser Stelle möchte ich mich nochmals ganz herzlich bedanken bei allen, die die Umfrage ausgefüllt haben. Mit grossem Interesse habe ich die vielen Antworten auf die offenen Fragen gelesen und viel daraus gelernt.

Die Umfrage besteht aus drei Teilen. Der erste Teil ist dazu da, sich ein Bild der befragten Population zu machen. Der zweite Teil richtet sich an Leute, die SchülerInnen haben, die an Wettbewerbe teilnehmen, und der dritte Teil an solche, die dies nicht haben. Diese zweite Gruppe ist in der Schweiz sehr klein (nur 6 Personen) und somit wahrscheinlich nicht sehr repräsentativ.

2.1 Die befragte Population

Der erste Teil der Umfrage versucht, ein Bild von der befragten Population zu machen. Es ist klar, dass hier ein gewisser Bias vorhanden ist. Die Leute, die den Link bekommen haben, wurden nicht repräsentativ gewählt, und die, die dann auch noch geantwortet haben, kann man wahrscheinlich auch nicht als willkürlich betrachten. Trotzdem ist es interessant, einen Blick auf die gesammelten Daten zu werfen und sie manchmal auch mit den beiden anderen Ländern zu vergleichen. Die erste Frage “An was für einer Schule unterrichten Sie?” zeigt in der Schweiz und Puerto Rico ein sehr ähnliches Bild (Abb. 1): die grosse Mehrheit der Lehrpersonen unterrichtet in einer öffentlichen Schule, was auch der Realität entspricht. Und obwohl die Statistik in der UK ein bisschen verzerrt ist - es wurden überproportional viele Lehrpersonen in Privatschulen angeschrieben - zeigt sich doch ein ganz anderes Bild, das in etwa der Realität in der UK entspricht. Privatschulen sind dort ein sehr wesentlicher Teil vom Bildungssystem und gerade Wettbewerbe werden dort deutlich mehr eingesetzt (aus vielen verschiedenen Gründen).

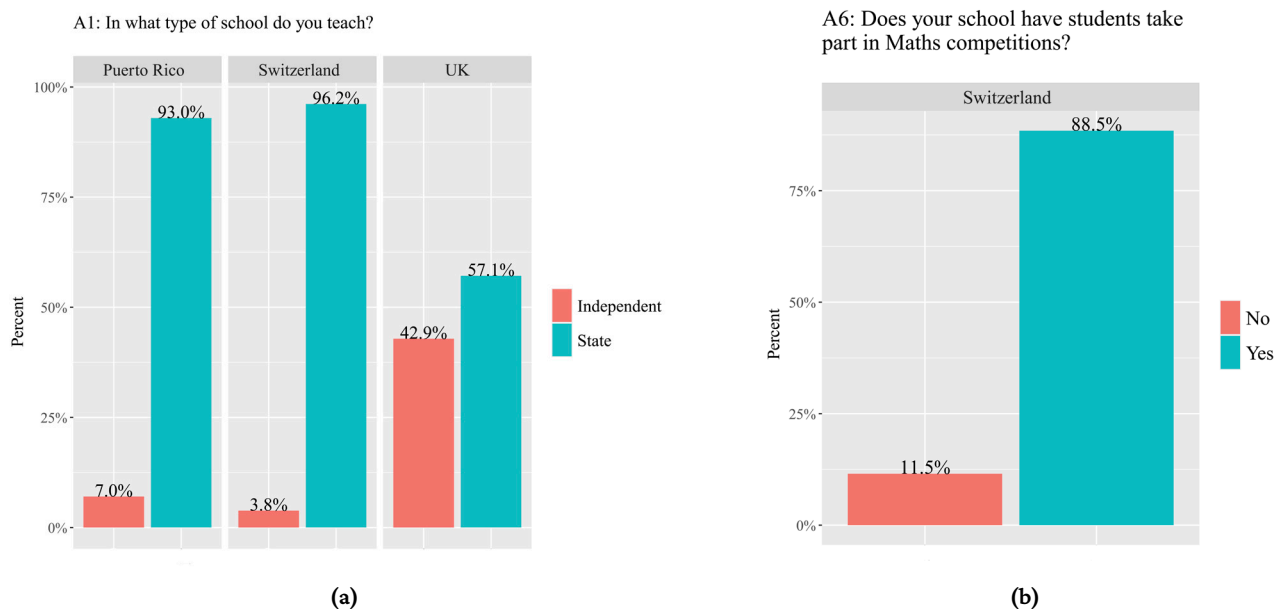


Abbildung 1 – Auswertung Teil 1: (a) An welcher Schule unterrichten Sie? (b) Nehmen Ihre SchülerInnen an Mathematikwettbewerben teil?

Erfreulich ist die Statistik über die Schweiz in Abb. 1 (b). Sie macht eine Aussage über das Teilnahmeverhalten der SchülerInnen. Offensichtlich haben sich Mathematikwettbewerbe im Gymnasium im letzten Jahrzehnt etabliert. Auch wenn die Umfrage vielleicht nicht ganz repräsentativ ist, wissen wir aus anderen Quellen, dass auf dem gymnasialen Niveau der Mathematikwettbewerb Teil des Alltags geworden ist.

Bei der Altersverteilung (Abb. 2) sehen wir eine markante Differenz zwischen der Schweiz und den beiden anderen Ländern. Die Lehrpersonen in der Schweiz sind signifikant älter. Dies hat sicher einerseits mit der Ausbildung zu tun. Sowohl die UK wie Puerto Rico (Teil der USA) haben das angelsächsische Bildungssystem d.h. die Mittelschule ist oft ein Jahr kürzer und die Studierenden entscheiden sich direkt nach dem Bachelor für den Lehrerberuf. Das scheint aber nicht der einzige Grund. Vielleicht sind es die hohen Löhne in der Schweiz, die den Beruf attraktiver halten. Vielleicht ist die Stichprobe auch nicht repräsentativ in dieser Hinsicht - darüber lässt sich spekulieren.

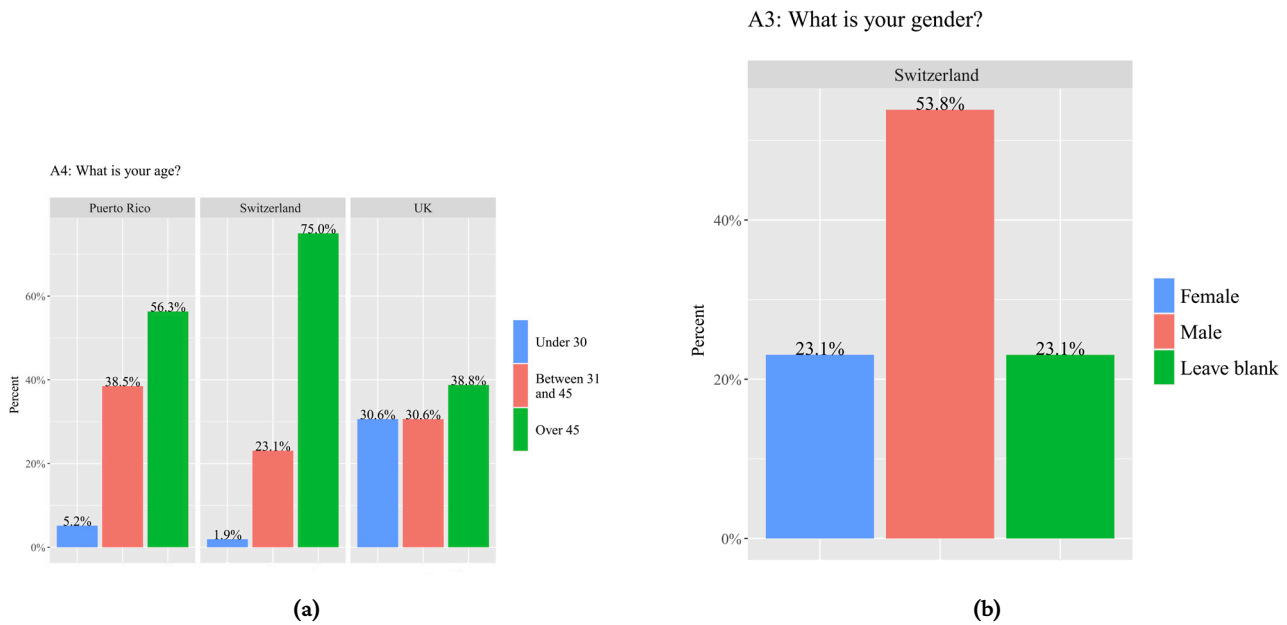


Abbildung 2 – Auswertung Teil 2: (a) Wie alt sind Sie? (b) Was ist Ihr Gender?

Besonders interessant ist auch die Gender-Frage. In Abb.2 oben sehen Sie, dass in Puerto Rico mehr als zwei Drittel der Mathematiklehrpersonen Lehrerinnen sind. In der Schweiz kreuzt nicht mal ein Viertel an, eine Mathematiklehrerin zu sein. Dieses Feld möchte ich offen lassen, aber bietet sicher Gelegenheit für weitere Gedanken oder Studien.

2.2 Resultate

Die interessanteren Fragen wurden in Teil 2 gestellt: Wieso ermuntern Mathematiklehrpersonen, ihre SchülerInnen bei Mathematikwettbewerben mitzumachen? Ein Teil der Fragen hier war wiederum im MC Format und konnte statistisch ausgewertet werden, fast interessanter war aber der Teil mit offenen Fragen. Hier haben wir versucht, nach Stichwörtern zu suchen und sogenannte Strichlisten zu führen, dabei sind interessante Differenzen zwischen den Ländern ans Licht gekommen und auch innerhalb der Schweiz habe ich aus den Daten gelernt.

Schauen wir uns zuerst die folgende offene Frage an: “Was sind die Vorteile einer Teilnahme an Mathematikwettbewerben für SchülerInnen?” In der Schweiz ist die am häufigsten gegebene Antwort “Spaß”, in Puerto Rico und in der UK dagegen kommen Stichwörter wie “critical thinking” und “problem solving” am meisten vor - diese beide werden in der Schweiz nicht erwähnt. Was könnte ein Grund dafür sein? Meine These ist folgende: Im gymnasialen Unterricht in der Schweiz ist “problem solving” und “critical thinking” ein integrierter Bestandteil des Curriculums. Gerade die Autonomie der Schweizer Lehrperson erlaubt es, eigene Schwerpunkte zu setzen, und die Lehrpersonen, die sich interessieren für Wettbewerbe, sind vielleicht auch die Lehrpersonen, bei denen z.B. Problemlöse-Strategien sowieso zentral im Unterricht verankert sind. Im anglosächsischen System ist das “Teaching-to-the-test” noch immer stark verbreitet und dies könnte eine Erklärung sein, wieso das Problemlösen zu kurz kommt im traditionellen Unterricht. Dazu sollten wir nicht vergessen, dass die Schweizer Gymnasien nur von etwa 20% der SchülerInnen besucht wird, in England und in den USA gerade in den unteren Jahren alle SchülerInnen oft in der gleichen obligatorischen Schule sind, was natürlich einen grossen Unterschied im Unterrichtsstil und -inhalt bewirken kann. Es wäre sicherlich auch interessant zu untersuchen, wie Mathematikwettbewerbe in der Primar- und Sekundarschule wahrgenommen werden. Bei der Frage “Was sind die Nachteile einer Teilnahme an Mathematikwettbewerben für SchülerInnen?” sind sich die drei Ländern aber einig. Die meist genannte Antwort ist “keine” und am zweiten Platz “Zeit”.

Und auch bei der Frage: “Was sind die Vorteile für Lehrpersonen, wenn ihre SchülerInnen mitmachen an Mathematikwettbewerben?” waren sich die Lehrpersonen aus den verschiedenen Ländern erstaunlich einig, und man

könnte sich überlegen, ob dies universell gültige Antworten sind - dafür müsste das Thema noch umfassender untersucht werden. Bei den Vorteilen wird häufig genannt, dass man durch Wettbewerbe motivierte SchülerInnen hat und dass dies sich wiederum positiv auf das Klassenklima auswirkt. An dieser Stelle möchte ich Ihnen die folgenden drei Zitate nicht enthalten:

Wenn eine Gruppe Spass und Interesse an der Mathe findet, ist es einfacher die ganze Klasse zu begeistern.

Mathematik wird zu einem positiv besetzten Fach, das Interesse der SuS an solchen Aufgabenstellungen wirkt sich in den Unterricht hinein aus.

Begabte Schüler/-innen können beschäftigt werden, Spass an Mathe strahlt vielleicht in den Unterricht aus

Als Nachteil wird eigentlich einzig die Mehrarbeit erwähnt. Vielleicht müsste man hier vermehrt an die Schulleitungen appellieren: Mathematikwettbewerbe sind günstig für die Entwicklung der mathematischen Fähigkeiten, für das Schulklima und sind auch wichtig, siehe auch das gemeinsame Papier von AKSF und der European Maths Society (EMS) zu diesem Thema [3]. Wäre es nicht sinnvoll, einen Platz dafür in der Schule einzuräumen und diesen auch entsprechend zu entschädigen?

Interessant sind auch die beiden Grafiken in Abb. 3. Sie bestätigen einerseits ein bisschen meine These von oben. Die Schweizer Lehrperson setzt die Wettbewerbsaufgaben weniger im Unterricht ein als ihre KollegInnen in Puerto Rico und der UK, vielleicht gerade weil solche Aufgaben schon eingebaut sind. Oder gibt es vielleicht ganz andere Gründe dafür? Auch stellt man fest, dass das Konzept eines Mathematikklubs in der Schweiz viel weniger verankert ist als in den anglosächsischen Ländern. Dies scheint mit der Realität übereinzustimmen, aber warum dies so ist, möchte ich offen lassen.

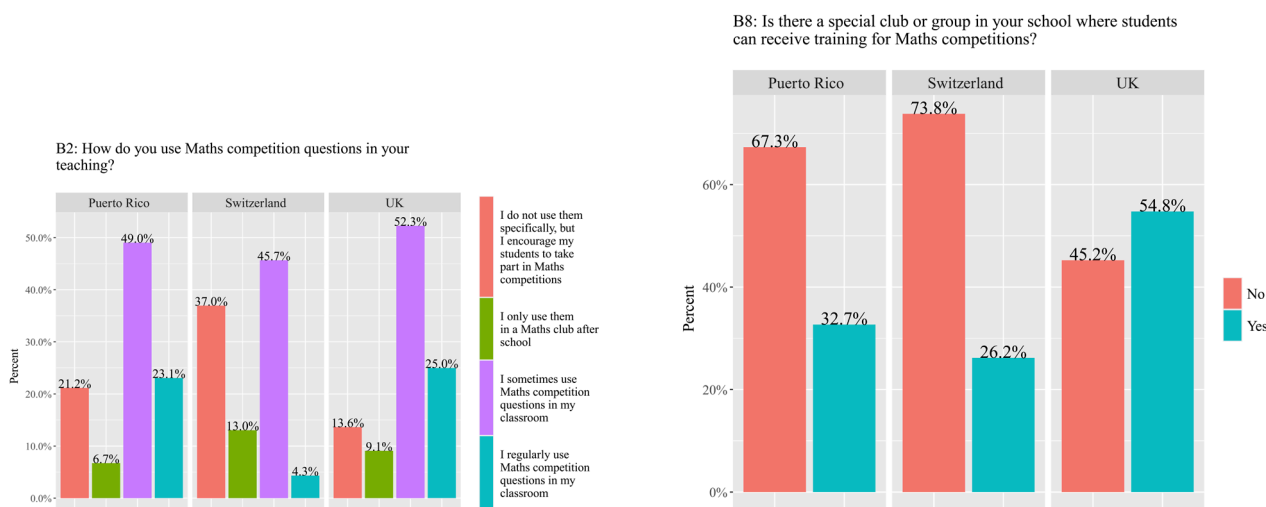


Abbildung 3 – Auswertung Teil 3: Wie verwenden Sie Aufgaben aus Mathematikwettbewerben in Ihrem Unterricht?

3 Analyse

Zusammenfassend darf man, glaube ich, sagen, dass Mathematikwettbewerbe sich in den Schweizer Gymnasien etabliert haben und als bereichernd für den Schulalltag gehalten werden. Der “Spass” Faktor ist ein grosser Motivator für die Teilnahme im Klassenverband und zeigt vielleicht auch, dass der Spass vielleicht manchmal etwas zu kurz kommt im traditionellen Unterricht. Es gibt aber noch viele offene und interessante Frage, die man in weiteren Studien nachgehen könnte. Insbesondere wäre die Wirkung von Wettbewerben auf der Primar- und Sekundarstufe ein ganz spannendes Thema, das weiter erforscht werden sollte.

Dazu sind auch gerade Wettbewerbe wie die Schweizer Mathematik Olympiade (SMO) eine Möglichkeit für talentierte SchülerInnen, gleichgesinnte Menschen kennenzulernen und dabei vielleicht sogar ein Mathematikstu-

dium in Betracht zu ziehen. Also, Breitensport und Spitzensport – es ist beides möglich bei den Mathematikwettbewerben und es ist auch beides wichtig!

Links

- [1] Meike Akveld, Luis Cáceres, David Crawford, Ferney Henao. *The impact of Maths competitions on teachers and their classrooms in Puerto Rico, Switzerland and the UK: A comparative study*. Journal, Volume, Pages, Year.
- [2] A. Cohan, A. Honigsfeld. *Breaking the mold of education* [Google Books version]. Plymouth, United Kingdom: Rowman and Littlefield Education, 2010.
- [3] *Memorandum of Cooperation between AKSF & EMS*. <http://www.aksf.org/collaboration.xhtml>, 2020.
- [4] J.P. John. *Gender differences and the effect of facing harder competition*. Journal of Economic Behavior & Organization, 143; 201-222, 2017.
- [5] A. Murray. *Competition as a teaching Strategy*. BU Journal of Graduate Studies in Education, Vol 11. issue I; 13-16, 2019.
- [6] A.B. Raupp. *Competition versus collaboration in STEM education*. Siliconrepublic. Retrieved October 11, 2018, from <https://www.siliconrepublic.com/careers/collaboration-stem-education>
- [7] R.Rusczyk. *The Pros and Cons of Math Competitions*. <https://artofproblemsolving.com/news/articles/pros-cons-math-competitions>, 2016.

Von Bretschneider zu Brahmagupta, Heron und Pythagoras

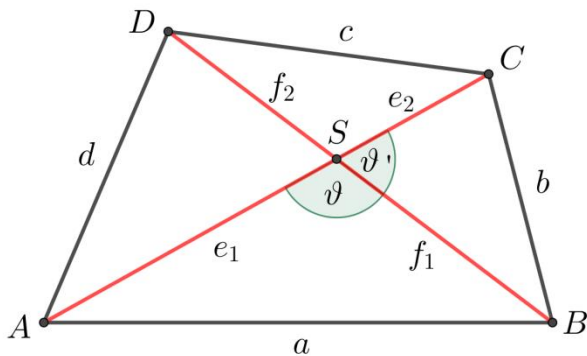
H.U. Keller, vorm. MNG, hukkeller@bluewin.ch

Wie kann der Flächeninhalt eines allgemeinen, ebenen Vierecks aus seinen Seiten und seinen Diagonalen berechnet werden? Die Herleitung einer solchen Formel – der Formel von Bretschneider – wird hier präsentiert.

Als Folgerungen daraus ergeben sich weitere, meist besser bekannte Formeln für die Flächeninhalte von Sehnenvierecken, von beliebigen und von rechtwinkligen Dreiecken.

Herleitung der Formel von Bretschneider

Mit den Bezeichnungen gemäss Fig. 1 unten gilt für die Flächeninhalte der vier Teildreiecke (wobei verwendet wird, dass $\sin(\vartheta) = \sin(\vartheta')$ ist):



$$A_{ABS} = \frac{1}{2} e_1 f_1 \sin(\vartheta); \quad A_{BCS} = \frac{1}{2} e_2 f_1 \sin(\vartheta);$$

$$A_{CDS} = \frac{1}{2} e_2 f_2 \sin(\vartheta); \quad A_{DAS} = \frac{1}{2} e_1 f_2 \sin(\vartheta).$$

Fig. 1: Bezeichnungen beim Viereck ABCD.

Der gesamte Inhalt der Vierecksfläche wird damit $A_{ABCD} = \frac{1}{2} ef \sin(\vartheta)$, und für sein Quadrat ergibt sich:

$$16 A_{ABCD}^2 = 4e^2 f^2 \sin^2(\vartheta) = 4e^2 f^2 (1 - \cos^2(\vartheta)) = 4e^2 f^2 - (2ef \cos(\vartheta))^2.$$

Im Term $2ef \cos(\vartheta)$ wird nun jede Diagonale durch die Summe ihrer Teilstücke ausgedrückt und dieser neue Term vollständig ausmultipliziert:

$$2ef \cos(\vartheta) = 2(e_1 + e_2)(f_1 + f_2) \cos(\vartheta) =$$

$$2e_1 f_1 \cos(\vartheta) - 2e_2 f_1 \cos(\vartheta') + 2e_2 f_2 \cos(\vartheta) - 2e_1 f_2 \cos(\vartheta').$$

Mit der Anwendung des Kosinus-Satzes bei jedem dieser vier Terme, und mit $\cos(\vartheta') = -\cos(\vartheta)$, folgt:

$$2ef \cos(\vartheta) = (-a^2 + e_1^2 + f_1^2) + (b^2 - e_2^2 - f_1^2) + (-c^2 + e_2^2 + f_2^2) + (d^2 - e_1^2 - f_2^2).$$

Dies kann sofort zu $2ef \cos(\vartheta) = -a^2 + b^2 - c^2 + d^2$ vereinfacht werden. Somit ergibt sich für das Quadrat des Flächeninhalts $16A_{ABCD}^2 = 4e^2 f^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2$, und damit für den Flächeneinhalt A_{ABCD} selber:

$$\text{Beliebiges Viereck } ABCD: \Rightarrow A_{ABCD} = \frac{\sqrt{4e^2 f^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2}}{4}$$

Dies ist die **Formel von Bretschneider** für den Flächeninhalt eines beliebigen Vierecks $ABCD$, ausgedrückt durch seine Seiten und seine Diagonalen. Die Formel gilt auch für Vierecke mit einspringenden Ecken!

[**Carl Anton Bretschneider** (* 27. Mai 1808 in Schneeberg; † 6. November 1878 in Gotha) war ein deutscher Mathematiker und Jurist.]

Anwendung auf Sehnenvierecke

Gemäss dem **Ptolemäischen Lehrsatz** gilt für Sehnenvierecke die Identität $ef = ac + bd$.

[**Claudius Ptolemäus** (* um 100, möglicherweise in Ptolemais Hermeiou, Ägypten; † nach 160, vermutlich in Alexandria, war ein griechischer Mathematiker, Geograph, Astronom, Astrologe, Musiktheoretiker und Philosoph.)

Die Formel von Bretschneider ergibt, zusammen mit dem Ptolemäischen Lehrsatz für Sehnenvierecke, für

das Quadrat des Flächeninhaltes den Term $A_{ABCD}^2 = \frac{4(ac + bd)^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2}{16}$.

Die Ausmultiplikation eines Terms $(s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c) \cdot (s - d)$ (mit $s := \frac{a + b + c + d}{2}$) und Vergleich

mit dem ausmultiplizierten Term $A_{ABCD}^2 = \frac{4(ac + bd)^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2}{16}$ zeigt, dass diese beiden

Terme identisch sind! Folglich gilt bei jedem Sehnenvierecken $ABCD$:

$$\text{Sehnenviereck } ABCD: \Rightarrow A_{ABCD} = \sqrt{(s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c) \cdot (s - d)}$$

Dies ist die **Formel von Brahmagupta**, die sich so als Spezialfall der Formel von Bretschneider ergibt.

[**Brahmagupta** (Devanagari: ब्रह्मगुप्त; * 598; † nach 665) war ein indischer Mathematiker und Astronom.]

Anwendung auf beliebige Dreiecke

Diese Formel von Brahmagupta erinnert nicht von ungefähr an die Formel von Heron zur Berechnung des Flächeninhalts A_{ABC} eines Dreiecks ABC mit gegebenen Seiten a , b und c . Da jedes Dreieck einen Umkreis hat, kann ein beliebiges Dreieck ABC als degeneriertes Sehnenviereck angesehen werden, bei dem der Punkt D mit dem Punkt A zusammenfällt, womit folglich die Seite d gleich Null wird. Damit vereinfacht sich die Formel von Brahmagupta bei einem Dreieck (wieder mit s gleich dem halben Dreiecksumfang) zu:

$$\text{Beliebiges Dreieck } ABC: \Rightarrow A_{ABC} = \sqrt{(s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c) \cdot s}$$

Dies ist die **Formel von Heron**, die sich so als Spezialfall aus der Formel von Brahmagupta ergibt.

[**Heron von Alexandria** (altgriechisch Ἡρόων *Hērōn*, genannt *Mechanicus* [ὁ μηχανικός *ho mēchanikós*]; † nach 62) war ein griechischer Mathematiker und Ingenieur.]

Anwendung auf rechtwinklige Dreiecke

Was ergibt sich, wenn die mit der Formel von Heron berechnete Dreiecksfläche zufällig gerade gleich

$\bar{A}_{ABC} = \frac{1}{2}ab$ sein sollte? Dies ist natürlich genau dann der Fall, wenn a senkrecht auf b steht. Dann gilt für

das Quadrat der Dreiecksfläche nach Heron immer noch $A_{ABC}^2 = s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)$; wird darin

$s = \frac{a+b+c}{2}$ eingesetzt und ausmultipliziert, erhalten wir die folgende Gleichung:

$$A_{ABC}^2 = \frac{1}{16} (2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4) = \frac{1}{4}a^2b^2 = \bar{A}_{ABC}^2.$$

Mit der Substitution $x := c^2$ ergibt sich für x die quadratische Gleichung

$$x^2 - 2(a^2 + b^2) \cdot x + (a^2 + b^2)^2 = 0,$$

welche die einzige Lösung $x = c^2 = a^2 + b^2$ hat.

Darum gilt in jedem Dreieck ABC mit einem rechten Winkel zwischen den Seiten a und b :

Rechtwinkliges Dreieck ABC mit $a \perp b$: $\Rightarrow A_{ABC} = \frac{1}{2}ab$ und $a^2 + b^2 = c^2$

Das ist der **Satz von Pythagoras**, der sich so als Spezialfall aus der Formel von Heron ergibt.

[**Pythagoras von Samos** (* um 570 v. Chr. auf Samos; † nach 510 v. Chr. in Metapont in der Basilicata) war ein antiker griechischer Philosoph und Mathematiker.]

P.S.: "Die Mathematik als Fachgebiet ist so ernst, dass man keine Gelegenheit versäumen sollte, sie etwas unterhaltsamer zu gestalten." Blaise Pascal.

[**Blaise Pascal** (* 19. Juni 1623 in Clermont-Ferrand; † 19. August 1662 in Paris) war ein französischer Mathematiker, Physiker, Literat und christlicher Philosoph.]

Nachtrag: Alternative Herleitung der Formel von Heron

Die Formel von Heron hätte auch mit Hilfe des Satzes von Pythagoras gefunden werden können. Dies ist mit so hübschen und trickreichen Anwendungen der binomischen Formeln verbunden, dass diese Herleitung hier kurz dargestellt werden soll:

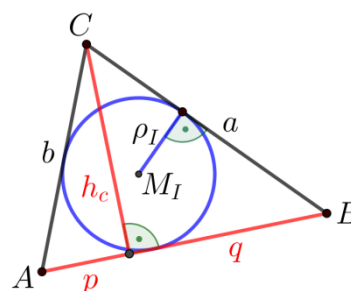


Fig. 2: Bezeichnungen beim Dreieck ABC .

Es gilt, mit den Bezeichnungen in Fig. 2 oben, und mit $s := \frac{a+b+c}{2}$ und $p+q=c$:

$$h_c^2 = a^2 - q^2 = b^2 - (c-q)^2.$$

Aus dieser Gleichung lässt sich $q = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}$ berechnen.

Damit wird

$$h_c^2 = (a-q)(a+q) = \left(a - \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}\right) \cdot \left(a + \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}\right) = \left(\frac{2ac - a^2 + b^2 - c^2}{2c}\right) \cdot \left(\frac{2ac + a^2 - b^2 + c^2}{2c}\right).$$

Dieser Term kann, wiederum mit Hilfe von binomischen Formeln, faktorisiert und umgeformt werden zu

$$h_c^2 = \frac{(b^2 - (a-c)^2)((a+c)^2 - b^2)}{4c^2} = \frac{(b-(a-c)) \cdot (b+(a-c)) \cdot ((a+c)-b) \cdot ((a+c)+b)}{4c^2}.$$

Der letzte Bruch lässt sich auch schreiben als

$$h_c^2 = \frac{4}{c^2} \cdot \frac{b-(a-c)}{2} \cdot \frac{b+(a-c)}{2} \cdot \frac{(a+c)-b}{2} \cdot \frac{(a+c)+b}{2}.$$

Beachten wir weiter, dass beispielsweise $\frac{b-(a-c)}{2} = \frac{b+c-a}{2} = \frac{a+b+c}{2} - a = s - a$ ist, und entspre-

chende Vereinfachungen für die anderen drei Faktoren gelten, dann ergibt sich mit $A_{ABC}^2 = \frac{1}{4}c^2 h_c^2$ sofort die bekannte **Formel von Heron** für den Flächeninhalt eines beliebigen Dreiecks ABC :

$$\boxed{\text{Beliebiges Dreieck } ABC \Rightarrow A_{ABC} = \sqrt{(s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c) \cdot s}}$$

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ABC kann auch als $A_{ABC} = \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot \rho_I$ berechnet werden, wobei ρ_I sein Inkreisradius ist. So erhalten wir als Bonus dazu auch noch eine **Formel für seinen Inkreisradius**:

$$\boxed{\text{Beliebiges Dreieck } ABC \Rightarrow \text{Inkreisradius } \rho_I = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}}$$

Literatur:

- Archiv der Mathematik und Physik, Vol. 48 (1868), pp. 245 – 348, G. Dostor.
- The American Mathematical Monthly, Vol. 67, No. 3 (Mar. 1960), pp. 291–292, V. F. Ivanoff.
- Ausarbeitung zum Satz von Brahmagupta, Sommersemester 2018, Thimo Wanders.
- https://de.wikibooks.org/wiki/Beweisarchiv:_Geometrie:_Planimetrie:_Dreieck:_Satz_des_Heron.
- <https://de.wikipedia.org/wiki/...> für die Lebensdaten der erwähnten Mathematiker.

Buchbesprechung

Mario Gerwig: Der Satz des Pythagoras in 365 Beweisen. Mathematische, kulturgeschichtliche und didaktische Überlegungen zum vielleicht berühmtesten Theorem der Mathematik. Mit einem Geleitwort von Günter M. Ziegler. XXI + 352 Seiten. eBook CHF 29.00. Softcover Book CHF 36.50. Springer-Verlag GmbH Deutschland, 2021. ISBN 978-3-662-62885-0. ISBN 978-3-662-62886-7 (eBook).

<https://doi.org/10.1007/978-3-662-62886-7>

Das Buch ist ein hochinteressantes Ärgernis.

Doch der Reihe nach. Das Buch besteht aus drei Teilen. Der erste Teil gibt einen historischen Überblick über die Geometrie in der Antike, insbesondere Pythagoras und Euklid. Verschiedene Beweistechniken kommen zur Sprache. Weiter wird auf Leben und Lebenswerk von Elisha Scott Loomis (1852-1940) eingegangen.

Dies leitet zum zweiten Teil des Buches über. Der Amerikaner Loomis hat zu Beginn des 20. Jahrhunderts eine Sammlung von über 350 Beweisen für den Satz des Pythagoras zusammengestellt, welche 1927, 1940 und 1968 publiziert wurde. Der Kernteil des Buches von Mario Gerwig besteht nun in einer kritisch kommentierten Bearbeitung und Übersetzung dieser Beweissammlung von Loomis. Es mutet dabei etwas seltsam an, dass weder im Titel noch im Untertitel des Buches der originale Autor Loomis erwähnt wird.

Der Autor Gerwig hat die etwas skurrile Beweissammlung von Loomis inhaltlich klassifiziert und vernetzt. Dabei wurden einige nicht schlüssige Beweise von Loomis weggelassen. Bei anderen Beweisen mussten Lücken geschlossen werden.

Doch auch in der vorliegenden Version sind Gedankensprünge oft nur mit großem Aufwand überbrückbar, wie Autor Gerwig zu Recht anmerkt. So wird zum Beispiel bei der Figur zum geometrischen Beweis 60 (S. 157) ausführlich die Konstruktion eines Punktes beschrieben, der im nachfolgenden Text nirgends mehr erscheint. Dann folgt (auf der nächsten Seite, man muss Hin- und Herblättern) eine Aussage beginnend mit „Es gilt“, die mit dem Satz des Pythagoras recht einfach zu beweisen wäre. Ich habe keinen pythagorasfreien Beweis dazu gefunden. Diese Aussage wird im nachfolgenden Beweis aber gar nicht verwendet, dafür hat es dort einen Gedankensprung, der mich zwei Tage Arbeit gekostet hat. Solche Erlebnisse machen das Buch äußerst spannend. Vielleicht war die ursprüngliche Intention von Loomis ja gar nicht ein Lehrbuch ad usum delphini, sondern eine Sammlung von Knobelaufgaben und Knacknüssen. In diesem Sinne ist das Buch heute noch sehr lesenswert und eine moderne Bearbeitung zu begrüßen.

Der dritte Teil, nun wieder von Autor Gerwig, bietet didaktische Anmerkungen und eine Unterrichtseinheit zum Beweisen mit Pythagoras, eingebettet in allgemeine metadidaktische Überlegungen.

Diese Dreiteilung mit einem fachlichen Kern zwischen fachdidaktischen Ausführungen verleihen dem Buch einen etwas hybriden Charakter.

Bei der Übersetzung wurden die sprachlichen Abkürzungen weitgehend durch sprachunabhängige Symbole ersetzt, die Originalzeichnungen von Loomis behutsam nachge-

zeichnet und die Bezeichnungen den heute üblichen angepasst. Dabei wurde der Versuchung widerstanden, die Figuren in einer farbigen Fassung zu gestalten. Sie sind wie im Original von Loomis schwarz in grau mit durchgezogenen und gestrichelten Linien.

Das Buch hat mich einerseits geärgert, andererseits aber zu vielen spannenden Überlegungen und Studien geführt.

Hans Walser

Bringen Sie Ihren Mathematikunterricht auf eine neue Ebene

Dieses Lehrmittel basiert auf Erkenntnissen der Lernforschung und setzt diese auch praktisch um. Mit lernaktivierenden Aufgaben bekommen Schüler*innen Lust, sich mit der Theorie auseinanderzusetzen. Mit spezifischen Metakognitionsaufgaben festigen sie Gelerntes. Dazu kommen ansprechende Übungsaufgaben. Querverweise und Exkurse zeigen den Einfluss von Mathematik im Alltag. Zum Lehr- und Lernmittel gibt es reichhaltiges Zusatzmaterial, welches kostenlos zum Download zur Verfügung steht. Sauber strukturiert deckt es die Themen «Zahlen», «Terme, Gleichungen und Linearität», «lineare Gleichungssysteme», «quadratische Gleichungen» und «Funktionen» ab und führt damit durchs gesamte erste Jahr des Gymnasiums. Es ist der erste Band einer vierbändigen Reihe, wobei jeder Band ein Jahr des Gymnasiums abdeckt.

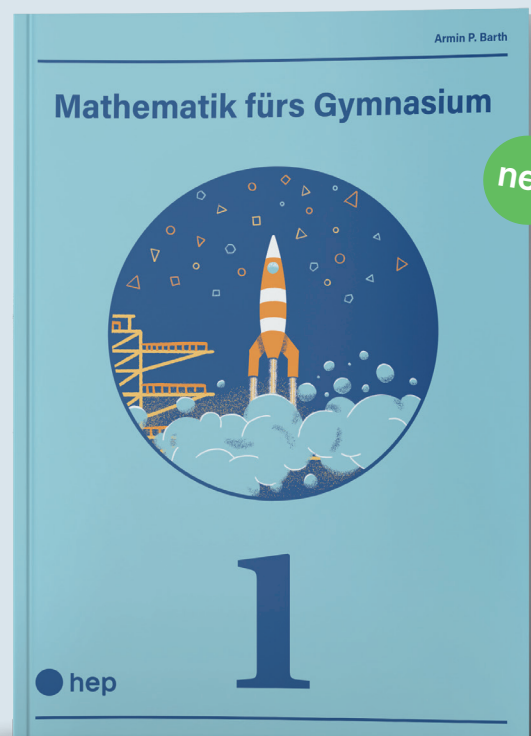
Armin P. Barth

Mathematik fürs Gymnasium

Band 1

1. Auflage 2021 | 432 Seiten | 19,5 × 27 cm | Broschur
ISBN 978-3-0355-1786-6 | CHF 54.-

Auch erhältlich als
eLehrmittel



Wie rechnet man mit dem Proportionalwinkel?

Herbert Bruderer, ETH Zürich (i.R.), herbert.bruderer@bluewin.ch

Man kann sich heute kaum mehr vorstellen, wie mühsam das Rechnen Jahrtausende lang war. Mit dem einst weit verbreiteten, heute längst vergessenen analogen Proportionalwinkel waren dank zahlreicher Skalen vielfältige Berechnungen möglich. Die Handhabung soll hier am Beispiel der Multiplikation und der Division beschrieben werden.

1 Erfindung im 16. Jahrhundert

Der Proportionalwinkel (etwas irreführend auch Proportionalzirkel genannt) und der verwandte Reduktionszirkel wurden in der zweiten Hälfte des 16. Jahrhunderts entwickelt. Es gibt mehrere Erfinder, sie stammen meist aus Italien. Galileo Galilei verbesserte den Proportionalwinkel, Jost Bürgi den Reduktionszirkel. Der Proportionalwinkel war bis Ende des 19. Jahrhunderts in Gebrauch, der Reduktionszirkel bis in die zweite Hälfte des 20. Jahrhunderts, z.T. gar bis heute. Die beiden mathematischen Werkzeuge waren weit verbreitet.

2 Was ist ein Proportionalwinkel?

Der Proportionalwinkel besteht aus zwei Schenkeln, die über ein Scharnier miteinander verbunden sind (vgl. Abb. 1). Auf den beiden Schenkeln waren beispielsweise lineare, trigonometrische und logarithmische Skalen aufgetragen. Es gab Skalen für Kreise, Flächen (Quadratzahlen) und Rauminhalt (Kubikzahlen). Sie tragen lateinische, englische oder französische Bezeichnungen, z.B. *linea arithmetica* (lineare Skala), *linea geometrica* (Quadratwurzelskala), *linea stereometrica* (Kubikwurzelskala), *linea astronomica* oder *linea chordarum* (Gradskala, trigonometrische Skala). Es gab italienische, französische und englische Modelle. Fürs Rechnen ist ein Stechzirkel erforderlich. Damit werden Strecken abgegriffen.



Abb. 1: Proportionalwinkel (Gerät). Proportionalwinkel haben im Unterschied zum Reduktionszirkel ein festes, nicht verschiebbares Scharnier (© ETH-Bibliothek Zürich, Sammlung Sternwarte).

Für die vier Grundrechenarten werden jeweils die *linearen* Skalen der beiden Schenkel verwendet. Sie umfassen 200 gleiche Teile (französisch „parties égales“, englisch „lines“). Andere Skalen sind etwa mit „plans“ (ebene Figuren), „poligones“ (Vielecke), „cordes“ (Sehnen: Winkel), „solides“ (geometrische Körper, z.B. Würfel, Kugel) beschriftet. Mit Proportionalwinkeln werden ähnliche Dreiecke gebildet.

Mit dem Stechzirkel greift man eine *gegebene Strecke* auf einer der beiden linearen Skalen (ab dem Nullpunkt) ab. Mit diesem „Mass“ legt man die Entfernung zwischen zwei *gleichen* Zahlenwerten auf beiden linearen

Skalen fest. Mit dem Stechzirkel misst man den *Abstand* zwischen zwei *gleichen* Markierungen (z.B. jeweils Zahl 80) der beiden linearen Skalen. Man überträgt diese Strecke auf einen der beiden Schenkel und liest dort das Ergebnis ab.

Die *Addition* und die *Subtraktion* laufen wie auf einem gewöhnlichen (linearen) Massstab ab. Dazu benötigt man eine oder ggf. beide linearen Skalen, d.h. die *Strahlenabschnitte*. Bei der Addition werden zwei Strecken zusammengefügt, bei der Subtraktion wird eine Strecke von der anderen abgezogen.

Mit Digitalrechnern wird gezählt, mit Analogrechnern gemessen. Da mit dem Proportionalwinkel Strecken gemessen werden, handelt es sich um ein analoges Gerät.

Für die *Multiplikation* und die *Division* werden sowohl die linearen Skalen wie auch die *Abstände* zwischen den Schenkeln benutzt, also die *Strahlen-* und die *Parallelenabschnitte* (Strahlensätze).

3 Wie multipliziert man mit einem Proportionalwinkel?

Beispiel: $7 \cdot 3 = ?$ (vgl. Abb. 2)

1. Greifen Sie auf einer der beiden linearen Skalen mit dem *Stechzirkel* den Wert 7 (Multiplikand) ab.
2. Öffnen Sie die beiden Schenkel des Proportionalwinkels so weit, dass der Stechzirkel genau zwischen die Werte 10 der beiden linearen Skalen passt (Wert 10 = geeignete, frei wählbare Zahl): Strecke AB (7).
3. Messen Sie mit dem Stechzirkel die Entfernung zwischen den beiden Werten 30 der linearen Skalen (Wert $30 = 3 \cdot 10$; $3 =$ Multiplikator): Strecke CD (21).
4. Übertragen Sie diesen Abstand mit dem Stechzirkel (ab dem Nullpunkt) auf eine der beiden linearen Skalen.
5. Lesen Sie das Ergebnis (21) ab.

$$SA : SC = AB : CD$$

$$10 : 30 = 7 : x$$

$$x = (7 \cdot 30) / 10 = 21$$

$$10 : 30 = 7 : 21$$

Ergebnis: 21

$$SA : SC = AB : x$$

$$x = (AB \cdot SC) / SA$$

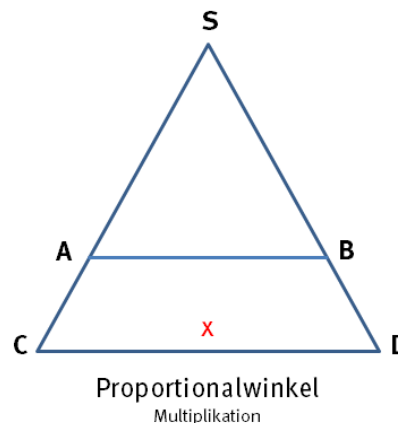


Abb. 2: Proportionalwinkel (Multiplikation). Dank der Strahlensätze kann man auf dem Proportionalzirkel multiplizieren. Die gesuchte Grösse x (Produkt) entspricht der Strecke CD (© Bruderer Informatik, CH-9401 Rorschach).

4 Wie dividiert man mit einem Proportionalwinkel?

Beispiel: $21 : 3 = ?$ (vgl. Abb. 3)

1. Greifen Sie auf einer der beiden linearen Skalen mit dem *Stechzirkel* den Wert 21 (Dividend) ab.
2. Öffnen Sie die beiden Schenkel des Proportionalwinkels so weit, dass der Stechzirkel genau zwischen die Werte 30 der beiden linearen Skalen passt (Wert 30 = geeignete, frei wählbare Zahl): Strecke CD (21).
3. Messen Sie mit dem Stechzirkel die Entfernung zwischen den beiden Werten 10 der linearen Skalen (Wert $10 = 30/3$; $3 =$ Divisor): Strecke AB (7).
4. Übertragen Sie diesen Abstand mit dem Stechzirkel (ab dem Nullpunkt) auf eine der beiden linearen Skalen.

5. Lesen Sie das Ergebnis (7) ab.

$$SC : SA = CD : AB$$

$$30 : 10 = 21 : x$$

$$x = (21 \cdot 10) / 30 = 7$$

$$30 : 10 = 21 : 7$$

Ergebnis: 7

$$SC : SA = CD : x$$

$$x = (CD \cdot SA) / SC$$

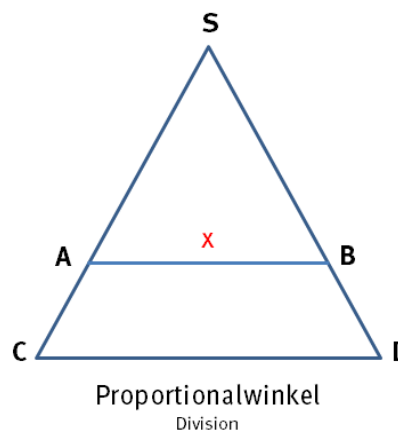


Abb. 3 Proportionalwinkel (Division). Dank der Strahlensätze kann man auf dem Proportionalzirkel dividieren. Die gesuchte Grösse x (Quotient) entspricht der Strecke AB (© Bruderer Informatik, CH-9401 Rorschach).

5 Eigenbau

Man kann einfache Proportionalwinkel (vgl. Abb. 4) und Reduktionszirkel (vgl. Abb. 5) auch selber anfertigen.

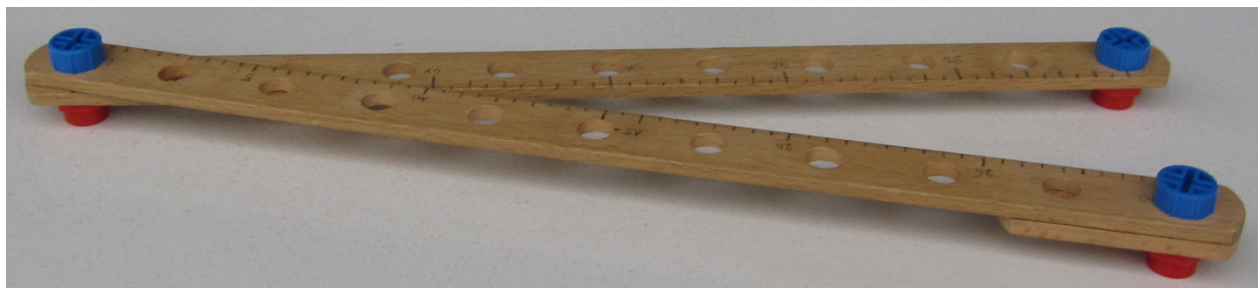


Abb. 4: Proportionalwinkel. Mit einem Proportionalwinkel (mit linearen Skalen auf beiden Schenkeln) und einem Stechzirkel kann man alle vier Grundrechenarten durchführen. Werden diese Instrumente beispielsweise mit logarithmischen oder trigonometrischen Skalen ausgestattet, sind viele weitere Berechnungen möglich.

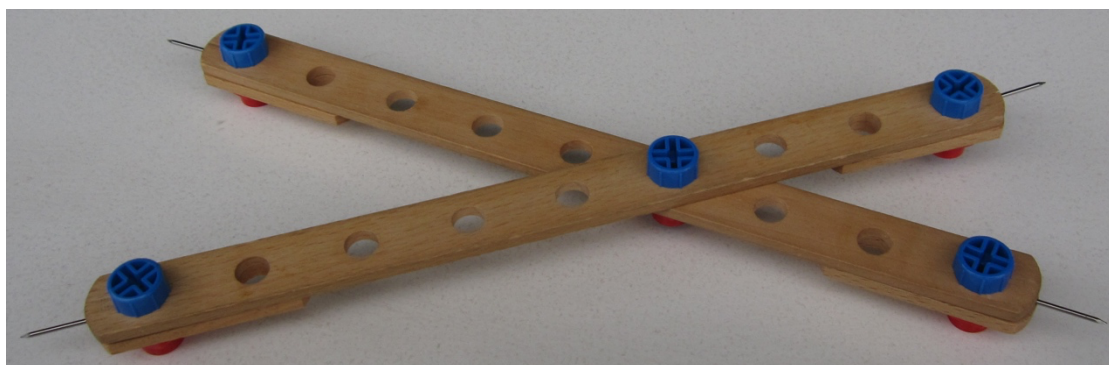


Abb. 5: Reduktionszirkel. Reduktionszirkel funktionieren ähnlich wie die Proportionalwinkel. Die Zirkelspitzen sind bereits in die Schenkel eingebaut. Man kann Strecken beispielsweise im vorgegebenen Verhältnis verkleinern (reduzieren). Es ist zweckmässig, wenn sich der Drehpunkt frei verschieben lässt.

6 Schluss

Das Rechnen fällt vielen Menschen schwer. Deshalb wurde seit Jahrtausenden versucht, diese Arbeit mit technischen Hilfsmitteln zu erleichtern. Der Weg vom Fingerrechnen über den (digitalen) Abakus, den (analogen) Proportionalwinkel, den (analogen) Rechenschieber und die (digitalen) mechanischen Rechenmaschinen bis zum heutigen Elektronenrechner war jedoch lang und steinig.

7 Quellen

Ausführliche Angaben zum Proportionalwinkel und zum Reduktionszirkel sowie Gebrauchsanleitungen finden Sie im folgenden Werk (vgl. Abb. 6):

Bruderer, Herbert: Meilensteine der Rechentechnik, De Gruyter Oldenbourg, Berlin/Boston, 3. Auflage 2020, Band 1, 970 Seiten, 577 Abbildungen, 114 Tabellen, <https://www.degruyter.com/view/title/567028?rskey=xoRERF&result=7>

Bruderer, Herbert: Meilensteine der Rechentechnik, De Gruyter Oldenbourg, Berlin/Boston, 3. Auflage 2020, Band 2, 1055 Seiten, 138 Abbildungen, 37 Tabellen, <https://www.degruyter.com/view/title/567221?rskey=A8Y4Gb&result=4>

Bruderer, Herbert: Milestones in Analog and Digital Computing, Springer Nature Switzerland AG, Cham, 3rd edition 2020, 2 volumes, 2113 pages, 715 illustrations, 151 tables, <https://www.springer.com/de/book/9783030409739>

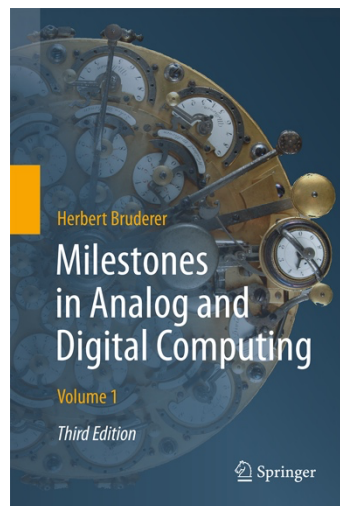
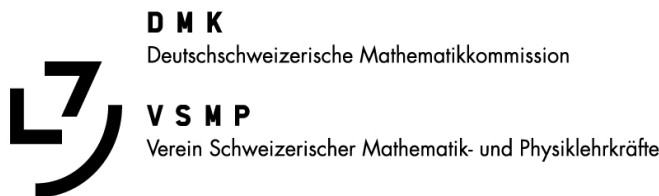


Abb. 6: Meilensteine der Rechentechnik/Milestones in Analog and Digital Computing: Titelbilder des ersten Bands (© De Gruyter Oldenbourg/Springer Nature 2020)



Letzte Plätze!

GeoGebra 1: Grundlagen der Bedienung

GeoGebra ist eine Multirepräsentationssoftware mit dynamischer 2D Geometrie, 3D Geometrie, Funktionenplotter, Computeralgebra und Tabellenkalkulation unter einem Dach, die auf verschiedenen Plattformen läuft und überall das gleiche Dateiformat hat. GeoGebra ist damit ein mächtiges digitales Mathematik-Werkzeug, das man bedienen können muss und wofür man auch Mathematikverständnis braucht.

In diesem Workshop liegt der Fokus auf der Bedienung von GeoGebra:

- Grundkonstruktionen der ebenen Geometrie
- Zugmodus, Schieberegler, Spur und Ortslinie
- Kontrollbuttons (Boolsche Werte)
- Einblick in die 3D Geometrie
- Wertetabellen, Funktionenplotter und Graphenplotter
- Konzept der dynamischen Arbeitsblätter
- Export in Word Arbeitsblätter und ins Web (GeoGebra Tube)
- Einsatz auf Tablets (und Smartphones), Prüfungsmodus

Die GeoGebra-Beispiele werden allen Teilnehmerinnen und Teilnehmern zur Verfügung gestellt.

Referent: Hans-Jürgen Elschenbroich (Medienberatung NRW i.R.)

Zielpublikum: Lehrkräfte der Sekundarstufe I und II Mathematik

Organisation: Prof. Dr. Norbert Hungerbühler (ETH),
Andrea Peter (DMK)

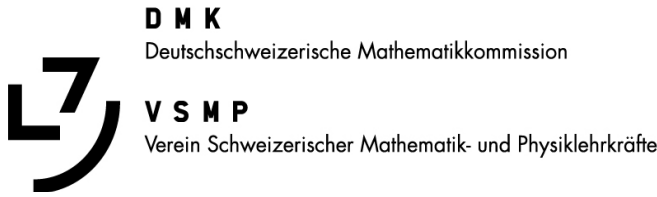
Datum und Zeit: Dienstag, den 2. November 2021, 10:00 Uhr – 16:30 Uhr
Ab 9:30 Begrüssungskaffee

Kursort: ETH Zürich, Hauptgebäude Raum HG G 19.1

Kurskosten: CHF 150 (inkl. Mittagessen und Kaffeepausen)
CHF 100 für VSMP-Mitglieder (www.vsmf.ch)

Anmeldung: <https://math.ch/DMK2021a>

Anmeldeschluss: 25. Oktober 2021



Letzte Plätze!

GeoGebra 2: Anschauliche Zugänge zur Analysis

Der Analysis-Unterricht ist in der Schule meist sehr kalküllastig. In diesem Kurs liegt der Fokus auf Anschaulichkeit und Verständnis. Sie lernen anschauliche und (weitgehend) kalkülfreie Zugänge zu den Grundvorstellungen der Analysis (Steigung und Ableitung, Krümmung, Approximation, Integral, Stammfunktion) kennen.

Die Mathematik *mit* GeoGebra als Werkzeug steht hier im Vordergrund, weniger die Bedienung von GeoGebra.

Es werden klassische, fast vergessene analoge Geräte (Funktionenmikroskop, Differentiograph, Integrimeter, Integraph) und historische Zugänge aufgegriffen und in digitalen Lernumgebungen mit GeoGebra modelliert. Schülerinnen und Schüler können sich damit aktiv einen eigenen anschaulichen Zugang erarbeiten und Sie nehmen hier die Schülersicht ein.

Ein didaktischer Schwerpunkt wird hier der unterrichtliche Einsatz ‘fertiger’ Lernumgebungen wie Funktionenlupe und Integrator sein. Aber Sie lernen auch, wie Sie solche Lernumgebungen selber vom leeren Bildschirm aus erstellen (grundlegende Kenntnisse im Umgang mit GeoGebra sind dabei sinnvoll).

Die GeoGebra-Beispiele werden allen Teilnehmerinnen und Teilnehmern zur Verfügung gestellt.

Referent:	Hans-Jürgen Elschenbroich (Medienberatung NRW i.R.)
Zielpublikum:	Lehrkräfte der Sekundarstufe I und II Mathematik
Organisation:	Prof. Dr. Norbert Hungerbühler (ETH), Andrea Peter (DMK)
Datum und Zeit:	Mittwoch, den 3. November 2021, 10:00 Uhr – 16:30 Uhr Ab 9:30 Begrüssungskaffee
Kursort:	ETH Zürich, Hauptgebäude Raum HG G 19.1
Kurskosten:	CHF 150 (inkl. Mittagessen und Kaffeepausen) CHF 100 für VSMP-Mitglieder (www.vsmg.ch)
Anmeldung:	https://math.ch/DMK2021b
Anmeldeschluss:	26. Oktober 2021

Dreifache Bronze für die Schweiz an Internationaler Mathematik-Olympiade

Lara Gafner, Wissenschafts-Olympiade, l.gafner@olympiad.ch

Für viele junge Mathegenies war es die wichtigste Woche des Jahres: Vom 18. bis 24. Juli fand die Internationale Mathematik-Olympiade (IMO) statt. Unter den 619 Teilnehmenden aus 107 Ländern waren auch sechs aus der Schweiz, von denen drei je eine Bronzemedaille ergatterten.

- Bora Olmez, International School Basel (BL)
- Joël Huber, Gymnasium Freudenberg (ZH)
- Johann Williams, Gymnase de Renens (VD)
- Mathys Douma, Lycée cantonal Porrentruy (JU)
- Philipp Junghans, Alte Kantonsschule Aarau (AG)
- Yanta Wang, Gymnasium Oberwil (BL)

Bronze ging an Bora Olmez, Joël Huber und Yanta Wang. Mathys Douma wurde ausserdem mit einer Ehrenmeldung ausgezeichnet.

Sankt Gallen statt Sankt Petersburg

Organisiert wurde die diesjährige IMO von Russland, allerdings konnten sich die Delegationen wegen der Pandemie nicht vor Ort treffen. Die Schweizerinnen und Schweizer liessen sich den internationalen Austausch jedoch nicht ganz nehmen. Vom 12. bis 25. Juli veranstalteten sie ein Lager in Wildhaus (SG) und verbrachten die IMO mit der befreundeten slowenischen Delegation. Zusammen gestalteten sie ihre Freizeit, von Ausflügen in die Kletterhalle oder nach Liechtenstein bis hin zu Schach oder Kartenspielen. Vor den beiden viereinhalbstündigen Prüfungen am 19. und 20. Juli stand aber vor allem eins auf dem Stundenplan: Üben, üben, üben. Mit dreifacher Bronze und einer Ehrenmeldung bewegte sich das Schweizer Team im Mittelfeld. Insgesamt schnitt das chinesische Team am besten ab.

Beweise, dass...

Bei den Prüfungen die Jugendlichen je 3 Aufgaben zu Themen aus den Bereichen Geometrie, Algebra, Kombinatorik und Zahlentheorie. Eine Aufgabe bestand zum Beispiel darin, folgende Behauptung zu beweisen: Wenn man eine beliebige Zahl n nimmt und alle Zahlen in der Reihe von n , $n+1$, $n+2$ bis $2n$ in zwei Gruppen aufteilt, dann gibt es im Falle aller Zahlen n die höher sind als 100 sicher zwei Zahlen in derselben Gruppe, deren Summe eine Quadratzahl ist. Um Rätsel wie dieses gut lösen zu können, investieren die Teilnehmenden der IMO zusätzlich zur Schule zum Teil viel Zeit und Energie in die Mathematik. Die Faszination des Faches motiviert sie: «Was mich an der Mathematik am meisten fasziniert sind die Verbindungen zwischen den verschiedenen Gebieten», meint Johann Williams, und fügt hinzu: «Mathematik ist ein wichtiges Fach, da Fortschritt in der Mathematik unsere Gesellschaft voranbringt - die Technologie, die Medizin und unser Verständnis der Welt selbst».

Ab Herbst 2021 können sich Ihre Schülerinnen und Schüler für die Schweizer Mathematik-Olympiade anmelden. Informieren Sie sich auf mathematical.olympiad.ch.

Les Suisses ont su se démarquer dans le cadre des Olympiades internationales de physique

Lara Gafner, Olympiades de la science, l.gafner@olympiad.ch

Lors des Olympiades internationales de physique (IPhO), qui se sont déroulées du 17 au 24 juillet, des jeunes de plus de 70 pays ont résolu des épreuves portant sur les LED, les ondes sismiques ou encore la physique quantique. Les cinq participants suisses ont pris part au concours depuis Signau (BE) - et ont remporté une médaille de bronze et trois mentions honorables.

- Kylian Gauteron, Lycée-Collège des Creusets (VS)
- Mathieu Zufferey, Lycée-Collège de la Planta (VS)
- Oliver Marti, Gymnasium Münchenstein (BL)
- Raphael Zumbrunn, Gymnasium Thun (BE)
- Valentin Hächler, Gymnasium Oberwil (BL)

Raphael Zumbrunn a obtenu une médaille de bronze grâce à ses excellents résultats. Kylian Gauteron, Mathieu Zufferey et Valentin Hächler ont été distingués chacun par une mention honorable.

Ondes et particules

Ce sont les deux examens de cinq heures, les 19 et 21 juillet, qui ont départagé les participants. Première étape: l'examen pratique. Lors de celui-ci, les jeunes se sont penchés sur les propriétés des condensateurs et des diodes électroluminescentes. Les IPhO se sont déroulées de manière virtuelle au lieu de prendre place en Lituanie. Le matériel nécessaire a donc été envoyé à l'avance par la poste aux quatre coins du globe. L'examen théorique portait, entre autres, sur la propagation des ondes sismiques dans le sol ou sur ce que l'on appelle une "particule dans une boîte". Il s'agit d'une simulation d'électrons dans laquelle le potentiel à l'intérieur d'une boîte théorique est nul et infini à l'extérieur de la boîte. "Cela peut être utilisé, par exemple, pour prédire les spectres d'absorption ou d'émission de molécules organiques", explique Nicolà Gantenbein, bénévole pour les Olympiades de physique.

Transmettre le flambeau

IPhO 2021, ce n'était pas seulement des examens en ligne. Les jeunes ont, entre autres, assisté à une visite virtuelle de la ville de Vilnius, participé à des activités ludiques et même pu suivre une conférence de Didier Queloz, titulaire du prix Nobel de physique. Ce que retient Valentin Hächler de cet événement, ce sont surtout les moments qu'il a pu passer en compagnie des autres participants suisses: "L'atmosphère était super et détendue", souligne le jeune homme de 19 ans. Quant à Mathieu Zufferey, sa participation aux Olympiades de physique l'a convaincu : il souhaite désormais transmettre sa passion. Même si le futur étudiant de l'EPFL ne pourra plus participer à l'événement après l'obtention de son diplôme, mais il souhaite s'engager bénévolement pour organiser les Olympiades : "Je veux rester en contact avec les personnes formidables que j'ai rencontrées et donner aux jeunes étudiants la possibilité de participer eux aussi à ces événements si stimulants."



Dès l'automne 2021, vos élèves pourront s'inscrire aux Olympiades de physique. Plus d'informations sur physics.olympiad.ch.

Klima und Quanten im gymnasialen Physikunterricht

Hans Peter Dreyer, UNI Zürich & KS Wattwil, hanspeter.dreyer@uzh.ch

1 Prolog: Zwei Ziele und zwei Zielgruppen

Der Entwurf des neuen Rahmenlehrplans (RLP 20) bietet Anlass über Ziele nachzudenken, die im Unterricht angestrebt werden soll(t)en. Der RLP 20 erwähnt Klimapolitik in der Einleitung, Solarenergie und Treibhauseffekt in der Liste der Lerngebiete für das Grundlagenfach. Der Treibhauseffekt lässt sich mit den Strahlungsgesetzen und dem Verhalten von Gasmolekülen verstehen. Beides beruht auf der Quantenphysik. Diese gilt als sperrig und ist im Grundlagenfach bloss als mögliche Ergänzung angeführt. Doch Physik ohne Quanten ist wie Geschichte, die um 1900 stoppt. Die Klimafrage wiederum kann bei den Lernenden die Motivation für eine «zweite Kopernikanische Wende», eine in Richtung Mikrokosmos wecken.

Beim RLP Schwerpunktfach sind explizit sowohl Stefan-Boltzmann als auch die Wechselwirkung zwischen Strahlung und Materie aufgelistet. Ein Bogen vom Klima zur Quantenphysik ist für diese Zielgruppe leicht möglich. Allerdings erschwert es den Unterricht, dass vielerorts Lernende aus dem Schwerpunkt gemeinsam mit denjenigen in einer Klasse sind, für die Physik das am wenigsten geliebte Fach ist. – Hier wird über einen Lernweg zu Klima- und Quantenphysik mit Vertiefungsmöglichkeiten für Interessierte nachgedacht.

2 Treibhaus «Erde» ohne Quantenphysik

Als Ausgangspunkt dient das Diagramm mit den zeitlich und räumlich gemittelten Energieflüssen der Erde (Abb. 1). Es zeigt die Komplexität der Frage und die Notwendigkeit von fachübergreifender Zusammenarbeit. Die Physik trägt durch die Strukturierung und die grundlegenden Naturgesetze bei. Eine Lernschwierigkeit verursacht die Ausdehnung der Atmosphäre. Zur Vereinfachung kann man sie sich als 10 km dicke Schicht denken. Oben grenzt sie an das System «Sonne plus Weltall». Unten grenzt sie an das System «Erdboden». Die 10 km enthalten nur 25 m Wasserdampf und nur 4 m CO₂ (0.25%; 400 ppm), der Rest ist N₂ und O₂. Sie wird einerseits von kurzwelligem Sonnenlicht und andererseits von unsichtbarem langwelligem Licht durchflossen, das seinen Ursprung auf der Erde hat.

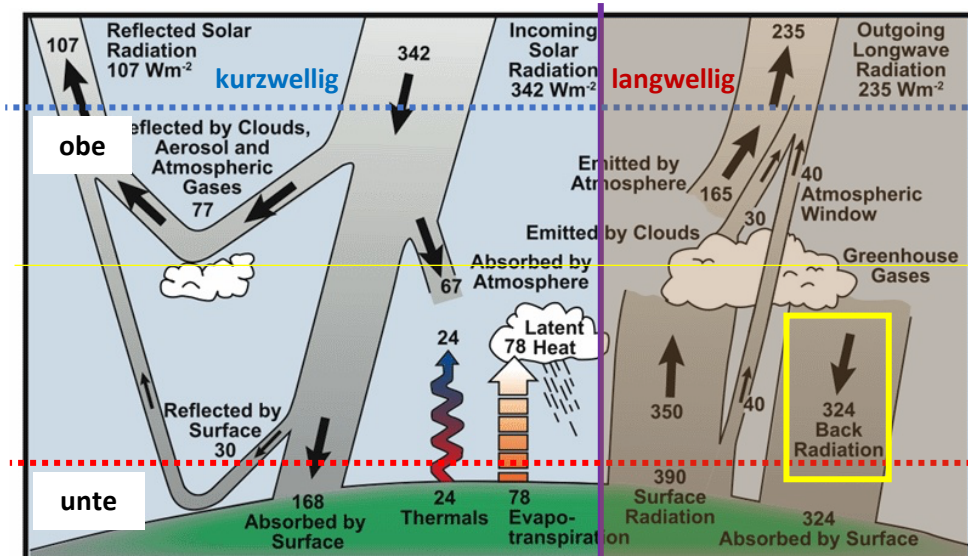


Abb. 1: Energieflüsse der Atmosphäre. Ergänzt, nach Kehl und Trenberth 1997.

Die Hauptaufgaben sind, die zentrale Rolle des Energietransports durch elektromagnetische Strahlung und den Unterschied zwischen dem Sonnenlicht (im linken Teil von Abb. 1) und dem infraroten Strahlungsmix (rechter Teil) zu lehren und zu lernen. Um im stationären Gleichgewicht zu bleiben, muss die Erde 342 W/m^2 als Strahlungsmix an der oberen Grenze der Atmosphäre wieder ans Weltall abgeben können. Die Rollen, die das IR und die Treibhausgase dabei spielen, hat der Schwede Svante Arrhenius schon 1897 erkannt. Arrhenius hatte sich dank eines grosszügigen Stipendiums in Mitteleuropa weiterbilden dürfen, unter anderem 1887 bei Ludwig Boltzmann in Graz. Dieser hatte gerade das von Joseph Stefan 1879 in Wien auf empirischer Basis gefundene Strahlungsgesetz thermodynamisch begründet.

Heute kann man das Gesetz von Stefan im Gymnasium durch den Bezug auf die modernen IR-Heizwände mit der Erfahrungswelt in Verbindung bringen und die Grössenordnung der Konstanten empirisch überprüfen. Alle (schwarzen) Körper mit der Temperatur T geben nach Stefan & Boltzmann ein Gemisch von elektromagnetischer Strahlung mit der totalen Leistungsdichte J ab:

$$J = \sigma \cdot T^4 \quad (\text{A})$$

Ohne Atmosphäre, mit $J = 342 \text{ W/m}^2$ und $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$, wäre die Erdoberflächentemperatur 279 K . Mit Atmosphäre, für $J' = 390 \text{ W/m}^2$ IR-Abstrahlung, muss die Erdoberflächentemperatur $T' = 288 \text{ K}$ betragen. Gemäss diesen Zahlen sind die Erde und ihre Atmosphäre im Energiegleichgewicht. Doch die Energieflüsse und ihre Veränderungen sind nicht genau bekannt (Trenberth et al., 2009). Wie gross das Ungleichgewicht ist, und ob das IPCC die richtigen Schlüsse daraus zieht, ist deshalb politisch umstritten. Man findet selbst:

Erhöht das anthropogene CO_2 die IR-Abstrahlung um 1%, so steigt die Erdoberflächentemperatur um $0.7 \text{ }^\circ\text{C}$.

Beim Haarföhn kann man sehen und fühlen, wie der Heizdraht seine Farbe mit zunehmender Temperatur ändert. 1893 konnte Willy Wien ein weiteres Strahlungsgesetz aus der Thermodynamik begründen, das vorher nur empirisch bekannt war. Das Wiensche Verschiebungsgesetz beschreibt den Zusammenhang zwischen der Temperatur des strahlenden Körpers und seinem Strahlungsmaximum:

$$\lambda_{max} \cdot T = 2.9 \text{ mm} \cdot \text{K} \quad (\text{B})$$

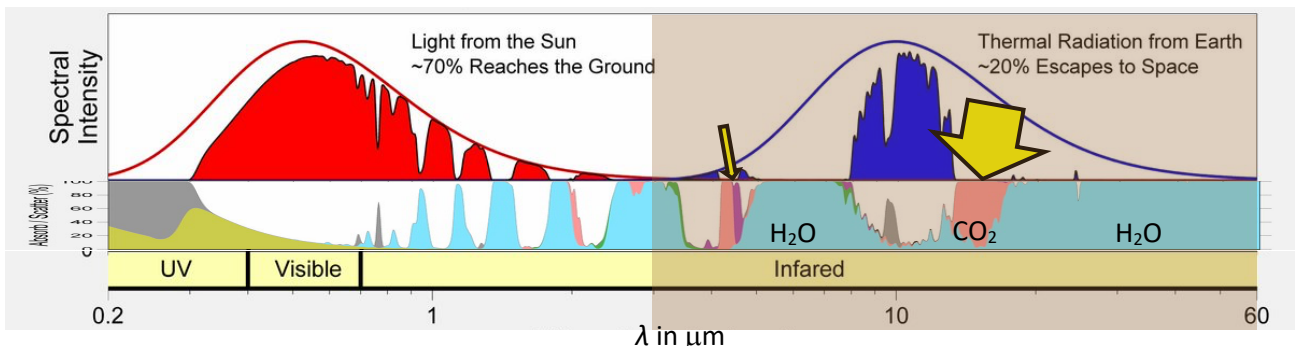


Abb. 2: Die Absorption von H_2O , CO_2 usw. im sichtbaren und im IR-Bereich, nach R. A. Rohde 2019.

Mit $T = 279 \text{ K}$ und auch mit $T' = 288 \text{ K}$ erhält man ziemlich genau $\lambda_{max} = 10 \text{ } \mu\text{m}$, also Infrarotstrahlung, Strahlung, deren Abfluss durch die Atmosphäre behindert wird, wie Abbildung 2 zeigt.

Als er die epochale Arbeit «On the influence of Carbonic Acid in the Air upon the Temperature on the Ground» publizierte, kannte Arrhenius also die Strahlungsgesetze A und B. Sie lassen sich beide aus Plancks Strahlungsgesetz (C) durch Integration über alle Wellenlängen sowie der Bestimmung des Maximums der mathematisch komplizierten Funktion herleiten. Anspruchsvolle Aufgaben fürs letzte Jahr im Schwerpunkt!

Die Quantenphysik beginnt mit Plancks Strahlungsgesetz von 1900:

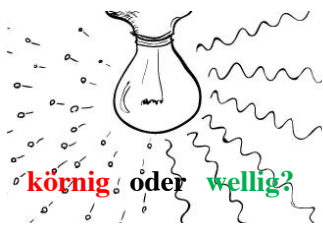
$$E_S(\lambda, T)d\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{d\lambda}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \quad (\text{C})$$

Ironie der Geschichte ist, dass 1901 in den «Annalen der Physik», die Plancks Entdeckung verbreiteten, auch der Artikel erschien «Über die Bedeutung des Wasserdampfs und der Kohlensäure bei der Absorption in der Erdatmosphäre». Auf Grund eines Messfehlers machte sich Knuth Angström darin zum Vorläufer der

modernen Klimaleugner. Es wäre allerdings unfair, ihm daraus den Strick zu drehen, denn das Ausmessen von IR-Strahlung begann erst 1880, nachdem der Amerikaner Samuel Langley das Bolometer erfunden hatte.

Schon vor fünfzig Jahren hat der Klimapionier Hans Oeschger an der Uni Bern einen Fortbildungskurs für Gymnasiallehrer angeboten. Klimafragen wurden bestimmt in manchen Physikzimmern bereits vor dem RLP 20 angegangen. Wenn man die Strahlungsgesetze und das Absorptionsverhalten der Atmosphäre phänomenologisch akzeptiert, kann man Klimaphysik auch ohne Quanten betreiben. Doch damit verpasst man die Chance, das Geschehen in der Atmosphäre auf «natürliche» Weise mit der Quantenphysik zu verbinden.

3 Quantenphysik des Lichts – Erzeugung und Verwandlung in der Atmosphäre



Allerdings ist Plancks Strahlungsgesetz, Wiege der Quantenphysik und Ausgangspunkt für Einsteins Arbeit von 1905, ein gordischer Knoten. Heute wird es mit der Quantenstatistik für Bosonen abgeleitet. Den historischen Umgang Plancks mit der damaligen Thermodynamik beurteilt Pais (1986, S. 375) als *unorthodoxe Behandlung des Boltzmannschen Prinzips*. Da weder klassische noch Quantenstatistik im Gymnasium möglich sind, kann man diesen harten Knoten höchstens mit einer qualitativen Schilderung durchschneiden.

Auch Lichtquanten, Thema der Quantenelektrodynamik (QED), scheinen ausserhalb der Reichweite des Gymnasiums zu liegen. Doch die Frühe Quantenphysik des Lichts genügt für viele Phänomene und ermöglicht bereits einen Start im 10. Schuljahr [1]. Optik wird im RLP 20 als Einstiegskapitel empfohlen. Wenn man die «Lehre vom Licht» nicht bloss als «Lehre von der Lichtausbreitung» auffasst, sondern auch die Frage «Was ist Licht?» zulässt, stösst man auf das ganze Spektrum der elektromagnetischen Strahlung und die Lichtquanten, die Albert Einstein 1905 im berühmten Artikel «Über einen die Erzeugung und Verwandlung von Licht betreffenden heuristischen Gesichtspunkt» (er)fund. Er stellte fest, dass *die (...) Erscheinungsgruppen besser verständlich erscheinen unter der Annahme, dass die Energie des Lichts diskontinuierlich im Raum verteilt sei*. Zu diesen Erscheinungsgruppen gehörten neben Plancks Gesetz die Fluoreszenz und der Photoeffekt. Beides konnte man nicht genauer ausmessen, aber verstehen, wenn man annahm, *dass das erregende Licht aus Energiequanten von der Energie hf besteht*. In der Atmosphäre absorbieren und emittieren die Treibhaus-Moleküle einzelne Lichtquanten verlustfrei, also bleibt λ unverändert. Die Atome und Moleküle am Erdboden absorbieren Lichtquanten mit hoher Energie und geben solche mit niedrigerer Energie ab. Das ist im Grundlagenfach interessanter als das Geschehen in einer Vakuum-Photo-Röhre. Nebenbei: Der Photoeffekt hat die Fachleute damals nicht überzeugt. Die Lichtquanten waren bis zu Comptons Experiment in der Physik umstritten. Planck schrieb noch 1912 in seinem Empfehlungsschreiben zur Wahl Einsteins an die Top-Position in Berlin, dieser habe mit der Idee der Lichtquanten *über das Ziel hinausgeschossen*.



Heute sind die Lernenden sofort geneigt, das Licht ausschliesslich als Teilchenstrom zu sehen und den in der Schule angelernten, im Alltag schlecht fassbaren, nicht-lokalen Wellenaspekt des Lichts zu komplett zu verdrängen. Das Doppelwesen der Quantenobjekte, die Dualität, macht *die* Lernschwierigkeit der Quantenphysik aus. Einstein sah schon früh klar. Er hatte die Dualität des Lichts 1909 mathematisch aus der Energiedichteschwankung in Plancks Strahlung herausgeschält. Einstein (zweiter von rechts) hielt daher 1911 an der Solvay-Konferenz im Schlussvotum fest: *Ich bestehe auf dem provisorischen Charakter dieses Konzepts [der anscheinend teilchenartigen Lichtquanten], das mit den experimentell nachgewiesenen Konsequenzen der Wellentheorie nicht verträglich ist*.

Im Gymnasium muss man die Dualität aus den Gleichungen $E = hf$ (D) und $p = h/\lambda_{\text{de Broglie}}$ (E) lesen: Links steht der **Teilchen**-, rechts der **Wellen**aspekt der Quantenobjekte «Licht» und «Elektron».

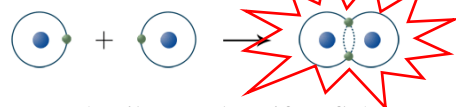
Das Provisorium beim Verständnis des Wesens des Lichts endete erst um 1950 mit der QED. Doch schon viel

früher gab es eine Klärung bei der Materie: Louis de Broglie übertrug in genialer Weise die Dualität vom Licht auf das Elektron. (Der ältere Bruder Victor hatte 1911 die Protokolle geschrieben, die Louis bei Studium anregten.) Nach der Lektüre von de Broglies Dissertation schrieb Einstein 1924 seinem Kollegen H. A. Lorentz: *Der junge de Broglie hat einen sehr interessanten Versuch zur Deutung der Bohr-Sommerfeldschen Quantenregel unternommen. (...) Ich habe einiges gefunden, was für seine Konstruktion spricht.* De Broglie hatte ohne empirische Evidenz etwas «konstruiert», er hatte theoretisch-physikalische Überlegungen angestellt, die auch im Grundlagenfach nachvollziehbar sind [1].

Dass de Broglie damit Bohrs Quantisierungsregel für den Drehimpuls stationärer Bahnen eine neue Grundlage gab, ist eher Thema für das Schwerpunktfach. Dort wird mit dem Drehimpuls gearbeitet. Dort wird wohl auch die Relativitätstheorie so weit entwickelt, dass Comptons Rechnung für die Streuung von Licht an Materie nachvollzogen werden kann. Unter solchen Voraussetzungen ist es auch denkbar, de Broglies relativistische Überlegungen samt Unterscheidung zwischen Phasen- und Gruppengeschwindigkeit nachzuvollziehen.

4 Quantenphysik für Atome und Moleküle, im Himmel und anderswo

Zwischen Louis de Broglies Wellen und der physikalischen Begründung des Absorptionsverhaltens der Atmosphäre liegt die grosse Kluft der ganzen Quantenmechanik. Ich erkenne keinen einfachen Übergang. Das Verhalten von Atomen und Molekülen zu erklären, ist die anspruchsvolle Aufgabe des Chemieunterrichts [2]. Dabei hat er unter anderem das schwierige Problem zu lösen, ohne Quantenphysik zu begründen, weshalb zwei elektrisch neutrale Objekte elektrisch zusammenhalten. Diesen Sachverhalt hatte Wolfgang Pauli in seiner Dissertation auch nicht befriedigend erklären können. Der erst 22-jährige sollte den einfachsten Fall, das H_2^+ -Molekülion, durchrechnen. Konzeptionell musste er vom Bohr-Modell ausgehen. Doch ohne die damals noch nicht bekannte Quantenmechanik und ohne den Spin konnte er nur scheitern. – Eine Folgerung für den heutigen Physikunterricht: Das seit 100 Jahren überholte, falsche Planetenbild vermeiden, damit es die Einführung der Orbitale im Chemieunterricht nicht unnötig erschwert!



Wenn man die Moleküle voraussetzt, könnte man auf die semiklassische Quantenphysik zurückgreifen. Schon 1906 hatte Einstein die Quantisierung von der Strahlung auf die Materie übertragen und geschrieben: *Während man sich bisher die molekularen Bewegungen genau denselben Gesetzmässigkeiten unterworfen dachte, welche für die Bewegungen der Körper unserer Sinnenwelt gelten, sind wir nun genötigt, für schwingungsfähige Ionen bestimmter Frequenz (...) die Annahme zumachen, dass die Mannigfaltigkeit der Zustände, welche sie anzunehmen vermögen, eine geringere sei (...).* Nicht alle Zustände sind möglich, sondern nur solche, deren Energie sich durch $\Delta E = hf$ unterscheiden, wobei f die klassische Frequenz ist. So konnte er die mit der Temperatur abnehmende spezifische Wärme beim Diamanten erklären. Im Solvay-Kongress von 1911 wurden die Lichtquanten kaum erwähnt. Hingegen stand die Übertragung der Quantisierung auf Schwingungen und Rotationsbewegungen im Zentrum.



Die bedeutsame «Influence of Carbonic Acid in the Air upon the Temperature of the Ground» kommt von den Streck- und Beugeschwingungen und den Rotationen der CO_2 -Moleküle. Semiklassisch gilt für die Energieniveaus des harmonischen Oszillators ebenfalls $\Delta E = hf$. Die Frequenz ist klassisch-mechanisch $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k/\mu}$. Die symmetrische Streckschwingung ist der geometrisch einfachste Fall. Die Energie hilft, die unbekannte Federkonstante k abzuschätzen: Beim Bilden des CO_2 -Moleküls werden 394 kJ/mol frei. Also stecken in den zwei gespannten Federn CO_2 -Moleküls $6.6 \cdot 10^{-19}$ J. Für die Auslenkung x einer Feder

nehmen wir die Bindungslänge a (beispielsweise durch Röntgenstrahlung ermittelt). Mit $a = 116$ pm erhält jede fiktive Feder eine Härte von $k = 49$ N/m. Mit der Masse eines Sauerstoffatoms resultieren die Resonanzfrequenz von 67 THz und eine Wellenlänge von etwa 4.4 μm . Diese Werte liegen im richtigen IR-Bereich (vgl. Abb. 2), trotz der starken Vereinfachungen. Damit eine Schwingung klimarelevant wird, muss sie ein schwingendes Dipolmoment besitzen wie eine Radioantenne. Das ist bei antisymmetrischen Schwingungen der Fall.

Derartige Überlegungen können vom CO_2 aufs H_2O übertragen werden. Das fehlende Dipolmoment von N_2

und O₂ verursacht ihre Inaktivität im IR. – Hertha Sponer (1895-1968) ist eine der ganz wenigen Frauen, die früh in der Quantenphysik gearbeitet haben. Sie schrieb 1920 bei Peter Debye die Dissertation «Über ultrarote Absorption zweiatomiger Gase». Mit der Arbeit «Anregungspotentiale der Bandenspektren von Stickstoff» wurde sie die erste Professorin in Göttingen. Sie flüchtete 1933 vor den Nazis nach Oslo und dann in die USA. An der Duke University forschte und lehrte sie weiter in ihrem Spezialgebiet *Molekülspektren und ihre Anwendung auf chemische Probleme* und heiratete spät den verwitweten James Franck.

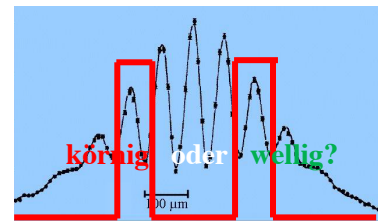
Das Atommodell, das Niels Bohr 1913 publizierte, liegt ebenfalls in diesem geistigen Umfeld: klassische Mechanik plus Energiequantisierung mit h . Das war schon für Rutherford dubios. Er schrieb am 20. März 1913 an Bohr: *I have received your paper safely and read it with great interest, but I want to look it over again (...). Your ideas as to the origin of the spectrum of hydrogen are very ingenious, and seem to work out well; but the mixture of Planck's ideas with the old mechanics makes it very difficult to form a physical idea of what is the basis of it. There appears to me one grave difficulty in your hypothesis (...) How does an electron decide what frequency it is going to vibrate. (...) You have to assume that the electron knows beforehand where it is going to stop.* Max von Laue und Otto Stern, damals beide in Zürich, leisteten deshalb den «Üetlischwur»: *Wenn sich dieses verrückte Modell [von Bohr] als richtig herausstellte, würden sie die Physik an den Nagel hängen.*



5 Eine neue Mechanik mit Quanten

2023 feiert de Broglies Idee ihren 100. Geburtstag: [Il faut] *unifier les points de vue corpusculaire et ondulatoire et approfondir un peu le sens véritable des quanta*. 2025 wird Werner Heisenbergs Idee *Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen* 100 Jahre alt. Und 2026 wird es 100 Jahre her sein, seit Schrödingers Produkt aus den Skiferien in Arosa,

Quantisierung als Eigenwertproblem, die Öffentlichkeit erreicht hat. Diese Öffentlichkeit ist allerdings nicht diejenige des RLP 20, wo die Quantenphysik im Grundlagenfach weiterhin ein Nischendasein als «Ausgewählter Aspekt moderner Physik oder aktueller Forschung» erscheint. Ein solcher Lehrplan ist wie einer, der den Geschichtsunterricht im Zeitalter der Sultane, Zaren und Kaiser enden lässt. Es ist wie Astronomie, die mit dem geozentrischen Weltbild zufrieden ist. Was schon im RLP von 1994 schlecht war, muss jetzt verbessert werden: Es ist für das Gymnasium des 21. Jahrhunderts unumgänglich, wenn auch anspruchsvoll, die anschauliche, aber – wie schon Rutherford erkannt hat – unklare physikalische Basis von Bohrs rein körnigem Atommodell über Bord zu werfen und auch im Physikunterricht nach einem quantenphysikalischen Atomverständnis zu suchen.



Gar Manches rechnet Erwin schon
Mit seiner Wellenfunktion.
Nur wissen möchte' man gerne wohl
Was man sich dabei vorstell'n soll.

Das kleinere Problem ist, die nötige Unterrichtszeit zu finden. Das ewige Dilemma, etwas Bewährtes zugunsten von etwas Neuem aufzugeben, stellt sich erneut. Mir scheint, es wäre auch von Nutzen für die Mathematik, wenn sie im Bereich der Kinematik und der Vektoren fachübergreifend «physikalischer» würde. Ein grösseres Problem ist, dass in der Quanten-

physik wenig «klassische» Rechenaufgaben gestellt werden können und Übungen ebenso wie Prüfungen in diesem Bereich intensivere Spracharbeit bedeuten. Das Hauptproblem ist aber die Vermittlung des unanschaulichen und kontra-intuitiven Konzepts «Dualität», das *zugleich* Teilchen- und Wellenaspekt beinhaltet. Es gibt immer neue Versuche, dieses Problem zu lösen. ReleQuant aus Norwegen ist einer; [1] ist ein anderer.

Quantenobjekte wirken auf uns paradox, aber sie selbst sind es nicht. R. Feynman sagt:
The 'paradox' is only a conflict between reality and our feeling of what reality 'ought to be'.

Die Elektronenbeugung an Graphit ist das einzige Experiment, mit dem im Gymnasium der Wellenaspekt der Materie gezeigt werden kann. Informativer als die vielen Simulationen ist das Studium von realen Doppelspaltexperimenten, beispielsweise die Experimente mit Neutronen von Zeilinger et al. Im Bild nebenan

sind den Daten vom Realexperiment mit den «welligen» Neutronen fiktive Daten gegenübergestellt, die «klassisch-körnige» Neutronen erzeugten. Experimente zum Tunneleffekt könnten überleiten zu den mysteriösen stehenden Psi-Wellen, mit denen Schrödinger das H-Spektrum hergeleitet hat und die Erich Hückel zum abgedruckten Spottgedicht motiviert haben. Für die Lernenden ist die Unsicherheit des Erfinders tröstlich, der 1926 dem *Hochverehrten Herrn Geheimrat Planck* nach Berlin schrieb: (...) *Ich meine selbstverständlich nicht, dass nun alles wieder mit Mechanik zu erklären sei, dass etwa jene ψ -Schwingungen Massenschwingungen im Sinne der gewöhnlichen Mechanik sind. Im Gegenteil: sie oder etwas ihnen Ähnliches scheint aller Mechanik und Elektrodynamik zugrunde zu liegen.*

Um mit der Bedeutung der ψ -Schwingungen im Gymnasium vertraut zu werden, kann man etwa die Zustandsfunktion $\psi_1(r) = C \cdot e^{-r/a}$ für den 1s-Zustand des Wasserstoffs untersuchen. Im Grundlagenfach geht es «nur» um die Erkenntnis, dass die Dualität einen stabilen Grundzustand garantiert, ohne dass irgendetwas umlaufen muss: Der nach aussen drückende Wellenaspekt (Impuls, resp. kinetische Energie) kompensiert den innen wirkenden Teilchenaspekt (elektrische Ladung, resp. Energie). Während im Schwerpunkt sicher das Quantenobjekt im unendlich tiefen Potentialtopf und Heisenbergs Unbestimmtheitsrelationen eine Rolle spielen, wird man sich im Grundlagenfach darauf konzentrieren, die «Flauschigkeit» der Atome zu betonen und darauf hinweisen, dass die Vielfalt der Orbitale mit der Vielfalt der Drehimpulse zu tun hat. Zur Quantenphysik auch im Grundlagenfach gehört die Auseinandersetzung mit Borns Wahrscheinlichkeitsinterpretation. Nicht das ψ sondern erst das Quadrat davon hat eine physikalische Bedeutung:

$$\psi^2(x) = w(x) \quad (\text{F})$$

Max Born schrieb 1926, Heisenberg, Jordan und er hätten zuerst die Auffassung vertreten, dass *eine exakte Darstellung der Vorgänge in Raum und Zeit überhaupt unmöglich sei.* (...) *Schrödinger auf der anderen Seite scheint den Ψ -Wellen eine Realität von der selben Art zuzuschreiben, wie sie Lichtwellen besitzen.* (...) *Keine dieser beiden Auffassungen scheint mir befriedigend.* (...) *Ich möchte versuchen, hier **eine dritte Interpretation** zu geben und ihre Brauchbarkeit an den Stossvorgängen zu erproben. Dabei knüpfe ich an eine Bemerkung Einsteins über das Verhältnis von Wellenfeld und Lichtquanten an.* (...) *Dieses ‘Gespensterfeld’ bestimmt die **Wahrscheinlichkeit** dafür, dass ein Lichtquant (...) einen bestimmten Weg einschlägt.*



Dass im Innersten der Natur der Zufall eine Rolle spielen soll, irritiert nicht nur die Lernenden heute. Schon Born berichtet über einen hitzigen Gedankenaustausch mit Schrödinger: *Sie [Born's neue Ideen] machten ihn wütend, weil er das nicht wollte. Wir hatten eine heftige Diskussion.* (...) *Die [von mir, Born] vorgeschlagene Theorie [entspricht] nicht der Folgerung der kausalen Bestimmtheit des Einzelereignisses.* Kausalität, die in der klassischen Physik grundlegende Beziehung zwischen Ursache und Wirkung, gilt in der Quantenphysik nicht. *Der Gedanke, dass ein einem Strahl ausgesetztes Elektron aus freiem Entschluss den Augenblick und die Richtung wählt, in der es fortspringen will, ist mir unerträglich. Wenn schon, dann möchte ich lieber Schuster oder gar Angestellter einer Spielbank sein als Physiker,* meinte Albert Einstein. – Doch genau das macht ein Lichtquant, das von einem angeregten CO₂-Molekül der Atmosphäre weggeht.

6 Epilog: Weitere Highlights im Quantenland

Die Klimafrage ist natürlich nicht der einzige Zugang zur Quantenphysik, respektive die einzige Anwendung, die fürs Gymnasium interessant ist. Bildgebung mit Röntgenstrahlen oder Magnetresonanz sind attraktive Themen, weil sie den eigenen Körper betreffen. Schrödingers Katze ist vielen Lernenden aus der Populärwissenschaft bekannt. Von Kryptographie mit verschränkten Zuständen haben die Nerds, die nicht nur in P & AM anzutreffen sind, schon gehört. Der Diodenlaser begleitet uns ebenso wie der Barcode. Die Halbleiterphysik, die den Computer ermöglicht, ist angewandte Quantenphysik. Erst recht weisen die milliardenschweren «Quantum flagship» Projekte auf die Bedeutung dieser «modernen» Physik hin. Kurz: Es gibt keinen Grund, sich im Gymnasium nicht mit dem Gebiet zu beschäftigen, das unseren Alltag ebenso verändert hat wie unser Denken.

Hinweise und einige Quellen

[1] Dreyer, H. P. (2021). *FACETTEN DER QUANTENPHYSIK*. 3 Module für je 8 Lektionen im 10., 11. und 12. Schuljahr des Grundlagenfachs; Aktivitäten & Ergänzungen; pdf kostenlos bei hanspeter.dreyer@uzh.ch

[2] Dreyer, H. P. (2021). Ein Versuch, die chemische Bindung im gymnasialen Physikunterricht zu verstehen. *chemie + biologie*, 106, S. 34-45. http://www.vsn.ch/cundb/21_1/cundb_21_1.pdf (17.05.21)

Ångström K. (1900). Über die Bedeutung des Wasserdampfs und der Kohlensäure bei der Absorption der Erdatmosphäre. *Annalen der Physik*, 3, S. 720–732.

Arrhenius, S. (1896). On the Influence of Carbonic Acid in the Air upon the Temperature of the Ground. *Philosophical Magazine and Journal of Science*. Series 5, Volume 41, April 1896, S. 237-276.

IPCC. Einstieg über: <https://www.deutsches-klima-konsortium.de/de/ipcc-ar6/uebersicht-ar6.html> (17.05.21)

Pais, A. (1986). *Raffiniert ist der Herrgott - Albert Einstein - Eine wissenschaftliche Biographie*. Braunschweig: Vieweg. (Für alle Informationen, die AE betreffen, mit vielen Quellen zur Quantenphysik.)

Planck, M. (1901). Über die Verbesserung der Wienschen Spektralgleichung. Über das Gesetz der Energieverteilung im Normalspektrum. *Annalen der Physik* 3. S. 553-563.

ReleQuant (2016). *Quantum Physics*. Oslo: University. <https://filarkiv.viten.no/quantum-physics> (17.05.21)

RLP 20 (2020). *Fach-Rahmenlehrpläne für Grundlagen-, Schwerpunkt- und Ergänzungsfach Physik (Entwurf)* https://matu2023.ch/images/PDF/DE/F-RLP_d.pdf (17.05.21)

Planetentstehung und extrasolare Planeten

Weiterbildungsangebot der DPK am Donnerstagnachmittag, 4. November 2021 an der Universität Bern
 Leitung und Durchführung: Prof. Dr. Christoph Mordasini, Weltraumforschung und Planetologie (WP),
 Administration und Ausschreibung durch die DPK / VSMP (vsmp.ch)

Abstract

Diese Weiterbildung vermittelt einen Einblick in die Theorie der Planetentstehung und dem Studium extrasolarer Planeten, einem jungen und dynamischen Forschungsgebiet innerhalb der theoretischen Astrophysik. Die Schweiz nimmt in diesem Gebiet international eine wichtige Vorreiterrolle ein. Die Weiterbildung besteht einerseits aus Vorlesungen, welche die theoretischen Grundlagen und wichtigsten neuen Resultate der Planetentstehungstheorie und Untersuchung von Exoplaneten thematisieren. Andererseits werden mehrere Laboratorien am Physikalischen Institut besucht, wo der Ursprung des Sonnensystems mit experimentellen Methoden, insbesondere mit Raumsonden, untersucht wird. Neben einer Kaffeepause, die auch dem Austausch Gymnasium-Hochschule dient, wird das Programm durch einen Ausblick auf künftige Forschung, wie etwa der Suche nach Leben auf anderen Planeten, abgerundet.

Zielgruppe: Physiklehrkräfte an Gymnasien der Schweiz

Kosten: keine

Kursort: Physikalisches Institut, Universität Bern, Gesellschaftsstrasse 6, 3012 Bern

Programm:

- 13:00 Begrüssung Deutschschweizerische Physikkommission, DPK
- 13:15 Vorlesung I: extrasolare Planeten, Beobachtungstechniken, beobachtete Eigenschaften, theoretische Grundlagen der Planetentstehung (Prof. Christoph Mordasini)
- 14:00 Kurze Pause
- 14:15 Vorlesung II: jüngste Forschungsergebnisse: CHEOPS, statistische Studien, Sonnensystem im Kontext (Prof. Christoph Mordasini)
- 15:00 Kaffeepause: Austausch mit Dozierenden
- 15:45 Besuch Labor mit Prof. P. Wurz, Leiter Abteilung Weltraumforschung und Planetologie
- 16:25 Gruppe A mit Dr. A. Riedo (Labor Laser Mass Spectrometry for the identification of Life Signatures on Planetary Surfaces), Gruppe B mit PD Dr. Antoine Pommerol (Eislabor)
- 17:05 Gruppe B mit Dr. A. Riedo (Labor Laser Mass Spectrometry for the identification of Life Signatures on Planetary Surfaces), Gruppe A mit PD Dr. Antoine Pommerol (Eislabor)
- 18:00 Ausblick: Nächste Schritte in der Forschung, Suche nach Leben, offene Fragen, Feedback, Abschluss
- 18:30 Verabschiedung und anschliessend fakultatives gemeinsames Abendessen

Anmeldung: www.dpk.ch/kurse

Bei Fragen können Sie sich gerne an Hanno Gassmann wenden: hanno.gassmann@gymthun.ch

Wasserschaukel und ART

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, martin.lieberherr@mng.ch

1 Einleitung

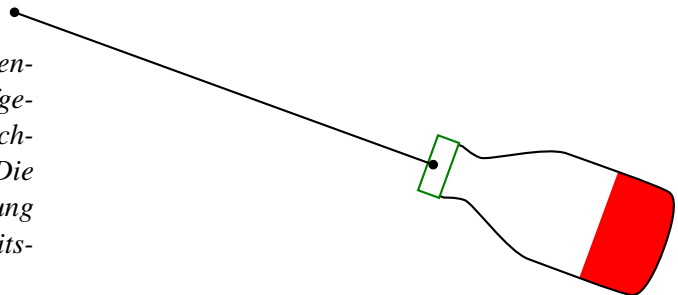
Allgemeine Relativitätstheorie (ART) ist gerade “hip”, denn pünktlich zum hundertsten Geburtstag wurden gleich zwei Vorhersagen bestätigt: Gravitationswellen und Schwarze Löcher. Höchste Zeit also, ein paar Elemente der ART in den allgemeinbildenden Unterricht zu integrieren. Das Äquivalenzprinzip der ART lässt sich leicht experimentell prüfen: In einem Heimversuch während des Corona-Fernunterrichts mussten die Schülerinnen und Schüler ihr Mobiltelefon frei fallen lassen (aus 30 cm Höhe auf ein Kissen) und währenddessen mit der Gratis-App phyphox¹ die Schwerebeschleunigung messen. Das Messresultat entsprach den Erwartungen, die Qualität der Interpretationen leider auch.

Oft braucht es nur einen Perspektivenwechsel, um das Äquivalenzprinzip in Alltag, Natur und Technik zu sehen. Jede Wäscheschleuder verwendet es, “um erhöhte Schwerkraft zu simulieren”. Die Wäsche kann, zumindest an einem Punkt, nicht erkennen, ob sie an einem Ort erhöhter Schwerkraft oder in einem beschleunigten Bezugssystem liegt. Im Grundlagenfach leite ich mit dem Äquivalenzprinzip die gravitative Rotverschiebung für schwache Felder und kleine Höhenunterschiede her: $f_2/f_1 = 1 \pm gh/c^2 + ..$

2 Experiment

Die Demonstration zum Äquivalenzprinzip in Abbildung 1 ist einfach zu realisieren und einer Schulklasse vorzuführen.

Abbildung 1: Eine halbvolle PET-Flasche mit Orangensaft – Etikette entfernt – wird an einer Schnur aufgehängt. Dazu habe ich den Deckel mit einer Ahle durchgestochen, eine Schur durchgefädelt und verknotet. Die Flasche wird wie ein Pendel in eine freie Schwingung versetzt. Nach kurzer Zeit stellt sich der Flüssigkeitsspiegel ruhig senkrecht zur Schnur.



Im freien Fall ist man schwerelos. Die Flüssigkeit befindet sich tangential zur Kreisbahn im freien Fall; diese Komponente der Schwerkraft verschwindet für sie. Die radiale Komponente bleibt übrig. Die Flüssigkeit erfährt in ihrem mitbeschleunigten Bezugssystem eine Schwerkraft zum Flaschenboden hin und eine kompensierende Normalkraft nach oben, welche beide zeitlich variieren.

Eine aufwendigere Variante stellt die Flasche auf ein Skateboard und lässt dieses eine geneigte Ebene hinabrollen. Ich ziehe aber die “Wasserschaukel”-Variante vor, denn man hat viel länger Zeit, das Verhalten des Flüssigkeitsspiegels zu beobachten.

¹ <https://phyphox.org/> (19. Februar 2021)

Schweizer Physik-Olympioniken zeigen, was sie können

Lara Gafner, Wissenschafts-Olympiade, l.gafner@olympiad.ch

Bei der Internationalen Physik-Olympiade (IPhO) vom 17. bis 24. Juli lösten Jugendliche aus über 70 Ländern anspruchsvolle Aufgaben über LED, Erdbebenwellen oder Quantenphysik. Die fünf Teilnehmer aus der Schweiz verbrachten den virtuellen Wettbewerb in Signau (BE) – und staubten eine Bronzemedaille und drei Ehrenmeldungen ab.

- Kylian Gauteron, Lycée-Collège des Creusets (VS)
- Mathieu Zufferey, Lycée-Collège de la Planta (VS)
- Oliver Marti, Gymnasium Münchenstein (BL)
- Raphael Zumbrunn, Gymnasium Thun (BE)
- Valentin Hächler, Gymnasium Oberwil (BL)

Raphael Zumbrunn sicherte sich mit seiner Leistung eine Bronzemedaille. Kylian Gauteron, Mathieu Zufferey und Valentin Hächler wurden je mit einer Ehrenmeldung ausgezeichnet.

Wellen im Boden und Teilchen in Boxen

Der Platz auf der Rangliste entschied sich in zwei fünfständigen Prüfungen am 19. und 21. Juli. Zuerst stand die praktische Prüfung an, bei der sich die Jugendlichen beispielsweise mit den Eigenschaften von Kondensatoren und Leuchtdioden befassten. Da die IPhO wegen der Pandemie nicht vor Ort im Gastgeberland Litauen stattfinden konnte, war das notwendige Material für die Experimente im Voraus per Post in der ganzen Welt verschickt worden. In der theoretischen Prüfung ging es unter anderem um die Ausbreitung von Erdbebenwellen im Boden oder um einen sogenannten «Particle in a Box». Gemeint ist damit eine Simulation von Elektronen, bei der das Potential innerhalb einer theoretischen Box null ist und ausserhalb der Box unendlich. «Damit lassen sich zum Beispiel Absorptions- oder Emissionsspektren von organischen Molekülen vorhersagen», erklärt Nicolà Gantenbein, Freiwilliger der Physik-Olympiade.

Die Erfahrung weitergeben

Auch jenseits der Prüfungen hatte die IPhO 2021 etwas zu bieten – wenn auch nur online. Unter anderem gab es einen virtuellen Stadtrundgang durch Vilnius, Spiele oder auch einen Vortrag des Schweizer Nobelpreisträgers Didier Queloz. Für Valentin Hächler war das Highlight die Zeit, die er mit den anderen Schweizer Teilnehmern im gemeinsamen Lager verbringen konnte. «Die Stimmung war sehr gut und entspannt», meint der 19-Jährige. Mathieu Zufferey schätzte die Teilnahme an der Physik-Olympiade so sehr, dass er die Erfahrung gerne weitergeben möchte. Der angehende EPFL-Student kann nach dem Schulabschluss nicht mehr teilnehmen, will sich aber freiwillig für die Organisation von Wissenschafts-Olympiade engagieren: «Ich will den Kontakt zu den tollen Leuten zu halten, die ich kennengelernt habe, und jüngeren Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit geben, auch an solchen interessanten Events teilzunehmen.»



Ab Herbst 2021 können sich Ihre Schülerinnen und Schüler für die Physik-Olympiade anmelden. Mehr dazu finden Sie auf physics.olympiad.ch.

Physik Fachschafts-Tagung: «Physik des Klimawandels»

Mittwoch 3. November. 2021,
In Winterthur an der BBW
Aula, Zürcherstrasse 28, 8400 Winterthur
(Bei Interesse auch als Livestream auf Zoom)

Das Klima ist eines der zentralen Themen unserer Gesellschaft und unserer Jugend. Leider musste ich feststellen, dass unsere technischen Berufsmaturanden nicht in der Lage sind den Treibhauseffekt oder das Konzept «Netto Null Treibhausgasemissionen» zu erklären.

Den Auftrag aus dem Rahmenlehrplan «Gesamthaft vermittelt der Unterricht in diesen Fächern den Lernenden die Grundlagen der Wissenschaftskultur und lässt das Verständnis für die Wichtigkeit und für die Bedeutung der Naturwissenschaften in ihren Beziehungen zu Gesellschaft, Technik, Umwelt, Wirtschaft und Politik reifen.» ist ernst zu nehmen.

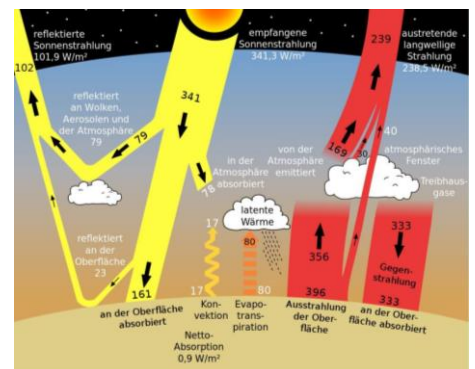
Da bietet die «Physik des Klimawandels» eine grosse Chance. Unsere Lernenden müssen die naturwissenschaftlichen Grundlagen des Klimawandels verstehen. Dazu zählt insbesondere die Bedeutung der Treibhausgase und das Konzept Netto-Null.

Ziel: Austauschen von Ideen wie das Thema im Unterricht behandelt werden kann.

Ablauf: Als Einstieg wird eine Übersicht über verschiedene Aspekte des Klimawandels in einem grösseren Zusammenhang präsentiert. Anschliessend wird eine Möglichkeit vorgestellt, wie der Klimawandel an der BMS behandelt werden kann. Die folgende Diskussionen ermöglichen es den teilnehmenden Lehrkräften, eigene Wege in der Unterrichtsgestaltung mitzuteilen und zu beschreiben.

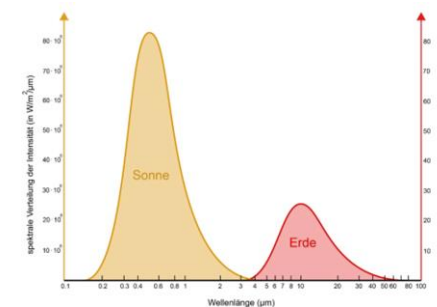
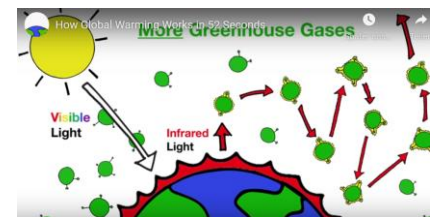
Zielpublikum: Physiklehrpersonen (der BM) aus der ganzen Schweiz.
Weitere Interessierte sind herzlich willkommen.

Organisation: Wolfgang Pfalzgraf (BBW), Ruben Mäder (GIBB)
Patronatskomitee: Eveline Eisenring (BMZ), Remo Häuselmann (BMZ),
Manfred Vögeli (BZU)



Programm: Mittwoch, 3. November, 2021

- 9.00 Eintreffen und Kaffee
- 9.30 Begrüssung Wolfgang Pfalzgraf (BBW):
Verschiedene Aspekte beim Klimawandel:
- Gerechtigkeit im Klimawandel, nach einer Weiterbildung bei Ivo Walliman
 - «Menschensysteme: Verschiedene Diskurse», nach einer Vorlesung Tony Patt, ETHZ
 - Der Beutelsbacher Konsens, Das Konsensproblem in der politischen Bildung.
 - Unterricht Physik Friedrich-Verlag Themenheft: Klimawandel im Spannungsfeld zwischen Wissenschaft und Gesellschaft
 - Abschlussprüfungen, der geheime Lehrplan.
- 11.00 (Referat noch offen, Beitrag von Teilnehmer:innen erwünscht).
Provisorisch: Der «Klima-Koffer» mit Experimenten und das Handbuch zum Bildungsprogramm «Klimawandel: verstehen und handeln». (Klimawandel-Schule.de, ein Projekt der Deutschen Physikalischen Gesellschaft und der Uni München)
- 12.30: Mittagessen, Kaffee und Austausch
- 14.00: Inputreferat und Diskussion: Maurus Pfalzgraf:
Vorstellen der Klimajugend Schweiz und ihrem Katalog von 130 Klimamassnahmen.
- 14.30: Diskussion in Gruppen: Wie kommen wir zu konkreten Schritten in der BMS? Wie kommen wir zu Prüfungsfragen?
- 15.30 Abschluss-Diskussion im Plenum:
Wie weiter? Wie organisieren wir einen Austausch?
- 16.30 Ausklang in der Harmonie.



Kosten: Die Berufs Bildungsschule Winterthur BBW übernimmt die Organisation. Das Mittagessen muss selber bezahlt werden.

Anmeldung:

[Link zur Anmeldung hier](#)

(https://bbwch-my.sharepoint.com/:x/g/person/wolfgang_pfalzgraf_bbw_ch/Efaqtq_3W7FNvWqM-BAw5NHcBJ4e0K_DskMJm7j5d5jlZaQ?e=oKr9mE)

oder per Mail an:

Wolfgang.Pfalzgraf@BBW.ch

Aktuelle Informationen:

Gastzugang verwenden bei der Anmeldung. (Dann BMS und Physik Wählen.)

(<https://olat.bbw.ch/auth/RepositoryEntry/635961495/CourseNode/103987170096052>)

Ort: Aula BBW Zürcherstrasse 28, 8400 Winterthur, <https://goo.gl/maps/ocwHrvDjmyFtNZPF6>
Bei Interesse auch als Live-Stream auf Zoom.

Wolfgang Pfalzgraf Ruben Mäder
Wolfgang.Pfalzgraf@BBW.ch Ruben.Maeder@GIBB.ch

ⁱ https://www.sbfli.admin.ch/dam/sbfli/de/dokumente/rahmenlehrplan_fuerdieberufsmaturitaet.1.pdf.download.pdf/rahmenlehrplan_fuerdieberufsmaturitaet.pdf



Where tomorrow's scientists meet. Where tomorrow's scientists meet.

SYNT und SYPT 2022: Jetzt anmelden!

SYNT: Das nationale Naturwissenschaftsturnier für Jugendliche von 12 bis 16 Jahren (12. März 2022)

Das *Swiss Young Naturalists' Tournament* (SYNT) ist ein Wettbewerb, welcher zum Ziel hat, den Austausch über Naturwissenschaften zu fördern. Seit 2020 finden am SYNT zwei Turniere gleichzeitig statt, eins auf **English** und das andere auf **Deutsch**.



SYNT Workshop

Die Jugendlichen können sich mit der Anmeldung fürs SYNT auch für den **Workshop** im **Februar** anmelden. Dort haben sie die Möglichkeit, Experimente zum ausgewählten Problem durchzuführen, und sie werden von erfahrenen Coaches auf das SYNT vorbereitet.

SYPT: Das nationale Physikturnier für Jugendliche ab 15 Jahren (26./27. März 2022)

Das *Swiss Young Physicists' Tournament* (SYPT) ist ein Wettbewerb für Jugendliche ab 15 Jahren, bei welchem die Diskussion über spannende physikalische Phänomene im Mittelpunkt steht. Bei der Vorbereitung führen die Jugendlichen Experimente durch und bereiten eine Präsentation vor. Am SYPT selber lernen sie viele andere Gleichgesinnte kennen, mit denen sie in **Physics Fights** über ihre Lösungen diskutieren können.



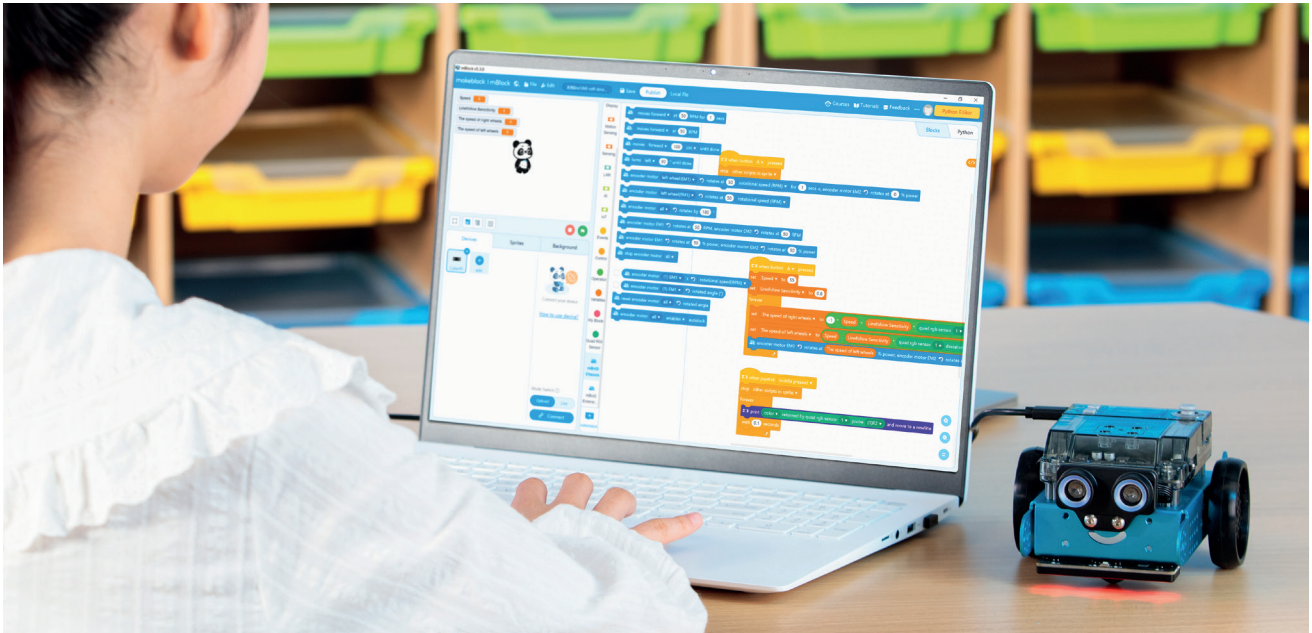
SYPT Physics Week

Die Jugendlichen können sich mit der Anmeldung fürs SYPT auch für die **Physics Week** im **Februar** anmelden. Dort werden sie von erfahrenen Coaches individuell bei der Bearbeitung des ausgewählten Problems betreut und auf das SYPT vorbereitet.

DIE NEUEN MAKEBLOCK PRODUKTE JETZT BEI EDUCATEC BESTELLEN

educatec.ch/mbot2

Der neue, netzwerkfähige Roboter zur Vermittlung von Programmier-, Robotik und MINT-Kenntnissen



mBot2 ist ein Lernroboter der nächsten Generation, der als Einstiegslösung für die Sekundarstufe konzipiert worden ist. Mit mBot2 lassen sich reale Anwendungen auf modernsten Technologie-Standards - einschliesslich **Robotik, KI, IoT und DataScience** - lehren und lernen. mBot2 wurde entwickelt, um Schülerinnen und Schülern einen interaktiven und intelligenten Unterricht zu ermöglichen, welcher fesselnd ist und Spass macht.

Mit der verbesserten Coding-Lernerfahrung von **mBlock** ermöglicht mBot2 Studenten und Pädagogen, mit dem blockbasierten Programmier-Ansatz zu beginnen und nahtlos in die objektorientierte, textbasierte Programmierung mit **Python** überzugehen - alles in derselben Umgebung.

weitere Informationen zu mBot2 finden Sie unter: educatec.ch/mbot2

Schweizer MakeX Robotics Wettbewerb 2021

MakeX ist eine globale Robotik-Wettbewerbsplattform, die multidisziplinäres Lernen in den Bereichen Wissenschaft und Technologie fördert. Seit 2017 hat MakeX über 60.000 Schüler inspiriert, eine Leidenschaft für **Wissenschaft, Mathematik, Informatik, Naturwissenschaft, Technik (MINT)** zu entwickeln und ihr Wissen auf reale Probleme anzuwenden. Die diesjährige Saison findet ab November 2021 an regionalen Wettkämpfen in Zürich, Basel, Genf und Vernier in verschiedenen Altersklassen statt, in denen die Teams ihre Fähigkeiten in den Bereichen Problemlösung, Block-Coding und Engineering unter Beweis stellen können.

Weitere Info, Anmeldung und Kurse über den Wettbewerb finden Sie unter: makexch.persona.co/



makeblock
education

Sind Sie Lehrer/In und möchten mBot2 drei Wochen lang unverbindlich in Ihrem Klassenzimmer testen? Dann nutzen Sie die Gelegenheit und fordern Sie über den **QR-Code kostenlos** ein Produktdemo an.

EducaTec AG
Altes Schulhaus, Kanzleigasse 2
Postfach, 5312 Döttingen

T +41 56 245 81 61, F +41 56 245 81 63
contact@educatec.ch, www.educatec.ch

educatec

Ja – Oui – Sì

Ich möchte Mitglied des Vereins Schweizerischer Mathematikund Physiklehrkräfte (VSMP) sowie des Vereins Schweizerischer Gymnasiallehrerinnen und Gymnasiallehrer (VSG) werden.

J'aimerais devenir membre de la Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique (SSPMP) et de la Société Suisse des Professeurs de l'Enseignement Secondaire (SSPES).

Desidero diventare membro della Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica (SSIMF) e della Società Svizzera degli Insegnanti delle Scuole Secondarie (SSISS).

Beitrag/Montant/Quota: Fr. 140 (VSG-SSPES-SSISS) + Fr. 50 (SSIMF-SSPMP-VSMP)

Frau/Mme/Sig.ra

Herr/M./Sig.

Prof.

Dr.

Name/Nom/Cognome:

Vorname/Prénom/Nome:

Adresse/Indirizzo:

PLZ Ort/NP Ville/CAP Luogo:

(Land/Pays/Paese):

E-Mail:

Tel.:

Geburtsdatum/Date de Naissance/
Data di nascita:

Sprache/Langue/Lingua: D F

Schule/École/Scuola:

Kanton/Canton/Cantone:

Kategorie/Catégorie/Categoria: aktiv/actif/attivo passiv/passif/passivo

StudentIn/Étudiant(e)/Studente/ssa.

Mitglied der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft/Membre de la Société Suisse de Physique/Membro della Società Svizzera di Fisica

Mitglied der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft/Membre de la Société Mathématique Suisse/Membro della Società Matematica Svizzera

Einsenden an/envoyer à/inviare a:

VSG – SSPES – SSISS, Sekretariat, z. H. Doris Lazzeri, 3000 Bern

www.vsg-sspes.ch

Impressum

Herausgeber — *Éditeur*
VSMP – SSPMP – SSIMF

Korrespondenz — *Correspondance*

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Werner-Kälin-Strasse 1 Tel. 041 210 25 58
8840 Einsiedeln

Layout — *Mise en page*

Samuel Byland samuel.byland@vsmp.ch
Weinbergstrasse 48b Tel. 079 728 63 97
5000 Aarau

Inserateverwaltung — *Publicité*

Hansjürg Stocker hjstocker@bluewin.ch
Friedheimstrasse 11 Tel. 044 780 19 37
8820 Wädenswil

Bestimmungen für Inserate und Beilagen

— *Tarifs pour les annonces et les annexes*

Inserate:

ganzseitig Fr. 500.–
halbseitig Fr. 300.–

Beilagen:

bis 20 g Fr. 500.–
über 20 g nach Vereinbarung

Adressänderungen — *Changement d'adresse*

VSMP Mitglieder — Membres de la SSPMP:
VSG – SSPES – SSISS
Sekretariat (Frau Doris Lazzeri)
Monbijoustrasse 36
3011 Bern
Tel. 031 382 52 33
information@vsg-sspes.ch

übrige Abonnenten — autres abonnés:

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Werner-Kälinstrasse 1 Tel. 041 210 25 58
8840 Einsiedeln

Auflage — *Tirage*

800 Exemplare
erscheint dreimal jährlich

Präsident VSMP — SSPMP — SSIMF

Arno Gropengiesser groppi@bluewin.ch
Via Domenico Galli 44
6600 Locarno-Solduno Tel. 091 751 14 47

Deutschscheizerische Mathematikkommission

Josef Züger praesident@dmk.vsmf.ch
Via Salens Tel. 081 641 10 94
7402 Bonaduz

Deutschscheizerische Physikkommission

Christian Stulz christian.stulz@gymburgdorf.ch
Gymnasium Burgdorf Tel. 031 638 03 03
Pestalozzistrasse 17
3400 Burgdorf

Commission Romande de Mathématique

Tatiana Mantuano tatiana.mantuano@gfbienne.ch
Grand'Rue 16 Tél. 032 544 47 53
2075 Wavre

Commission Romande de Physique

Yves Oestreicher yves.oestreicher@edu.ge.ch
Malvand 13 Tél. 079 796 69 95
1292 Chambéry

Commissione di Matematica della Svizzera Italiana

Luca Rovelli lucarovelli@ticino.com
Via Pedmunt 10 Tel. 091 825 76 69
6513 Monte Carasso

Redaktionsschluss (Erscheinungsdatum)

— *Délais de rédaction (de parution)*

Nr. 148 30.11.2021 (Ende Januar)
Nr. 149 31.03.2022 (Ende Mai)
Nr. 150 31.07.2022 (Ende September)

Druck und Versand — *Imprimerie*

Niedermann Druck AG
Letzistrasse 37
9015 St. Gallen
www.niedermanndruck.ch

Internet-Adressen — *Adresses Internet*

www.vsmf.ch — www.sspmp.ch — www.ssimf.ch



V S M P
S S P M P
S S I M F

Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e di Fisica